

Finance Numérique

Imad BADDA¹, Martin DUGUEY¹

23 mai 2022

Résumé

Projet réalisé dans le cadre du cours intitulé Finance Numérique et qui est intégré au module Mathématiques Financières en option du cursus MACS3 de l'école Sup Galilée. Ce cours est partagé avec les élèves du Master MSC in International Finance d'HEC et l'enseignement est assuré par M. KEBAIER.

Contexte et notations

Dans la suite des exercices, on se place dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}^*)$, avec \mathbb{Q}^* la probabilité risque neutre, et on considère un actif risqué S qui suit la dynamique suivante :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \quad (1)$$

où $\{W_t\}_{t \in [0; T]}$ est un mouvement brownien standard. On se donne aussi une discrétisation temporelle telle que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ avec $t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n} \quad \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Pour ne pas surcharger les notations, on supposera, dans les calculs, que \mathbb{E} fait référence à $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*}$.

1. Élève ingénieur, Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique (MACS), École Sup Galilée, 93430 Villetaneuse, France.

Table des matières

1	Exercice 1 : European Asian Option	3
1.1	Q1 : Loi et Espérance	3
1.2	Q2 : Première Variable de Contrôle	5
1.3	Q3 : Seconde Variable de Contrôle	7
1.4	Q4 : Comparaison des Variables de Contrôle	8
1.5	Q5 : Calcul de sensibilité	8
2	Exercice 2 : Delayed Start European Options	11
2.1	Q1 : Formulation explicite de l'espérance	11
2.2	Q2 : Comparaison d'Algorithmes	11
3	Exercice 3 : American Put Option	12
3.1	Q1 : Calcul avec l'algorithme de Longstaff-Schwartz	12
3.2	Q2 : Frontière d'exercice	13

1 Exercice 1 : European Asian Option

Le but de cet exercice est d'étudier différentes méthodes de calcul pour obtenir le prix d'une option asiatique, noté $A(0, S)$, ainsi que le vega, noté \mathcal{V} . On rappelle que le prix à l'instant initial d'une option asiatique est le suivant :

$$A(0, S) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+ \right] \quad (2)$$

On approximera $\int_0^T S_u du$ par la somme de riemann :

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \approx \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{t_i}$$

avec $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ notre discrétisation régulière de $[0; T]$ On obtient donc le prix suivant :

$$A(0, S) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{t_i} - K \right)^+ \right] \quad (3)$$

Prix de l'option par méthode de Monte-Carlo et son intervalle de confiance

On souhaite calculer le prix de l'option. Pour cela on va passer par la méthode de Monte-Carlo. Cette méthode est basée sur la loi forte des grands nombres car on sait que pour toute variable intégrable Z , si on a des variables Z_i de même loi que Z , on a

$$\bar{Z}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^M Z_i \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[Z]$$

Cette méthode étant probabiliste, il nous faut un intervalle de confiance de notre estimateur de $\mathbb{E}[Z]$. Par le TCL (Théorème Central Limite), on sait que, en rajoutant l'hypothèse que Z soit carré intégrable

$$\sqrt{M} \frac{\bar{Z}_M - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

. De ce fait on peut construire l'intervalle suivant pour $\mathbb{E}[Z]$:

$$\left[\bar{Z}_M - q_\alpha \sqrt{\frac{\mathbb{V}(Z)}{M}}; \bar{Z}_M + q_\alpha \sqrt{\frac{\mathbb{V}(Z)}{M}} \right]$$

avec q_α le quantile d'ordre α de la loi normale centrée réduite. Ici $Z = (I_T - K)_+$, avec $I_T := \frac{1}{T} \int_0^T S_u du$ et comme on ne connaît pas la loi du payoff, on déterminera $\mathbb{V}[(I_T - K)_+]$ numériquement à partir des tirages de $(I_T - K)_+$.

1.1 Q1 : Loi et Espérance

On s'intéresse à la loi de $\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt$. Regardons tout d'abord $\log(S_t)$

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log \left(S_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \right) \\ &= \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \end{aligned}$$

Maintenant si on regarde $\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \log(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t dt \\ &= \log(S_0) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_u du \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} d(tW_t) &= W_t dt + t dW_t \\ \Rightarrow \int_0^T d(tW_t) &= \int_0^T W_t dt + \int_0^T t dW_t \\ \Leftrightarrow TW_T &= \int_0^T W_t dt + \int_0^T t dW_t \\ \Leftrightarrow T \int_0^T dW_t &= \int_0^T W_t dt + \int_0^T t dW_t \\ \Leftrightarrow \int_0^T W_t dt &= \int_0^T (T-t) dW_t \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt = \log(S_0) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \frac{\sigma}{T} \int_0^T (T-t) dW_t$$

$\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt$ est une fonction affine d'une intégrale de Wiener donc $\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$. Explicitons alors cette loi.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\log(S_0) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \frac{\sigma}{T} \int_0^T (T-t) dW_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\log(S_0) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right] + \mathbb{E} \left[\frac{\sigma}{T} \int_0^T (T-t) dW_t \right] \\ &= \log(S_0) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \quad \text{car l'espérance d'une intégrale de Wiener est nulle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2 &= \mathbb{V} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt \right] \\
&= \mathbb{V} \left[\log(S_0) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \frac{\sigma}{T} \int_0^T (T-t) dW_t \right] \\
&= \mathbb{V} \left[\frac{\sigma}{T} \int_0^T (T-t) dW_t \right] \quad \text{car } \mathbb{V}[X+a] = \mathbb{V}[X] \\
&= \left(\frac{\sigma}{T} \right)^2 \mathbb{V} \left[\int_0^T (T-t) dW_t \right] \\
&= \left(\frac{\sigma}{T} \right)^2 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T (T-t) dW_t \right)^2 \right] \quad \text{car } \mathbb{E} \left[\int_0^T (T-t) dW_t \right] = 0 \\
&= \left(\frac{\sigma}{T} \right)^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T (T-t)^2 dt \right] \quad \text{isométrie d'Itô} \\
&= \left(\frac{\sigma}{T} \right)^2 \int_0^T (T-t)^2 dt \\
&= - \left(\frac{\sigma}{T} \right)^2 \frac{1}{3} [(T-t)^3]_0^T \\
&= \left(\frac{\sigma}{T} \right)^2 \frac{T^3}{3} \\
&= \frac{\sigma^2 T}{3}
\end{aligned}$$

On trouve donc que $\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt \sim \mathcal{N} \left(\log(S_0) + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \frac{\sigma^2 T}{3} \right)$

Maintenant si on s'intéresse à $\mathbb{E}[Y]$ avec $Y = e^{-rT} \exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt \right)$. On rappelle que pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \theta^2)$ alors $\mathbb{E}[\exp(X)] = \exp \left(\mu + \frac{1}{2} \theta^2 \right)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt \right) \right] \\
&= e^{-rT} S_0 e^{T \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{T}{3}} \\
&= S_0 e^{-\frac{r}{2} T - \frac{\sigma^2}{12} T} \\
&= S_0 e^{-(r + \frac{\sigma^2}{6}) \frac{T}{2}}
\end{aligned}$$

1.2 Q2 : Première Variable de Contrôle

Pour réduire notre incertitude sur l'estimation du prix de l'option asiatique, on peut utiliser une variable de contrôle.

Principe de fonctionnement

On souhaite estimer $\mathcal{J} = \mathbb{E}[X]$. On suppose que l'on a aussi une autre variable aléatoire Y . Soit $\beta \in \mathbb{R}$, on considère : $X - \beta Y + \beta \mathbb{E}[Y]$. On peut voir que cette variable aléatoire est d'espérance : \mathcal{J} :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[X - \beta Y + \beta \mathbb{E}[Y] \right] &= \mathbb{E}[X] - \beta \left(\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]] \right) \\
&= \mathcal{J}
\end{aligned}$$

Maintenant on peut s'intéresser à la variance de ce nouvel estimateur :

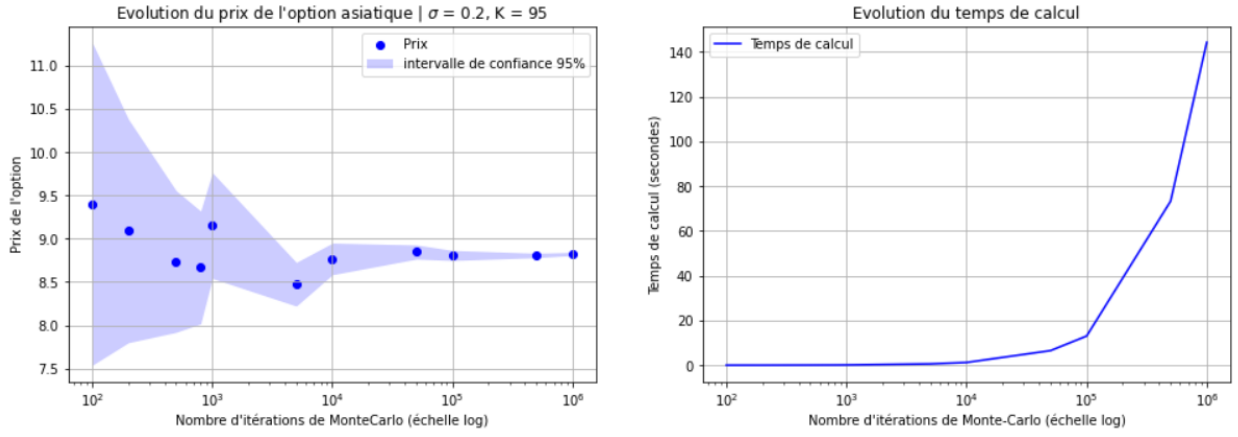


FIGURE 1 – Évaluation du prix de l'option asiatique avec un algorithme de Monte-Carlo classique, pour différentes tailles de tirage.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[X - \beta Y + \beta \mathbb{E}[Y]] &= \mathbb{V}[X - \beta Y + \beta \mathbb{E}[Y]] \\
&= \mathbb{V}[X - \beta Y] && \text{car } \mathbb{V}[X + a] = \mathbb{V}[X] \\
&= \mathbb{V}[X] + \beta^2 \mathbb{V}[Y] - 2\beta \text{Cov}(X, Y) \\
&= \beta^2 \mathbb{V}[Y] - 2\beta \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}[X]
\end{aligned}$$

On remarque que cette estimateur est une fonction polynomiale d'ordre 2 en β . De plus cette fonction admet un minimum global en $\beta^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{V}[Y]}$. Si on remplace β par β^* , on trouve une variance de :

$$\mathbb{V}[X - \beta^* Y + \beta^* \mathbb{E}[Y]] = (1 - \rho_{X, Y}^2) \mathbb{V}[X] \quad \rho_{X, Y} \text{ la corrélation entre } X \text{ et } Y$$

Donc pour n'importe quelle valeur de $\rho_{X, Y}$ notre nouvel estimateur de \mathcal{J} a une variance plus faible que l'estimateur originale. Et plus en valeur absolue, X et Y sont corrélés, plus la variance de notre nouvel estimateur est faible. Finalement on peut approcher \mathcal{J} par $\tilde{\mathcal{J}}_M$ tel que :

$$\tilde{\mathcal{J}}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \beta^* Y_i) + \beta^* \mathbb{E}[Y]$$

avec X_i des v.a i.i.d de même loi que X et Y_i des v.a i.i.d de même loi que Y .

Dans notre cas, notre variable de contrôle sera $Y = e^{-rT} \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt\right)$ avec $\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_t) dt \approx \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_{t_i}$. Nous avons calculé plus haut (1.1) l'espérance de Y qui est :

$$\mathbb{E}[Y] = S_0 \exp\left(-\frac{T}{2} \left(r + \frac{\sigma^2}{6}\right)\right)$$

Comparaison des résultats, analyse et interprétation

Sur la figure 2, on observe que le prix de l'option, pour des petites valeurs de σ , est équivalent qu'il soit estimé par un algorithme classique ou utilisant une variable de contrôle. Cependant, l'avantage sur l'estimation est donné à l'algorithme utilisant la variable de contrôle Y lorsque $\sigma > 1$. En effet, les estimations par cette méthode sont globalement comprises dans l'intervalle de confiance de la méthode classique, dite naïve, avec une meilleure approximation comme en témoigne la longueur de l'intervalle de confiance. Notre objectif est donc atteint, on a construit un meilleur estimateur du prix de l'option asiatique.

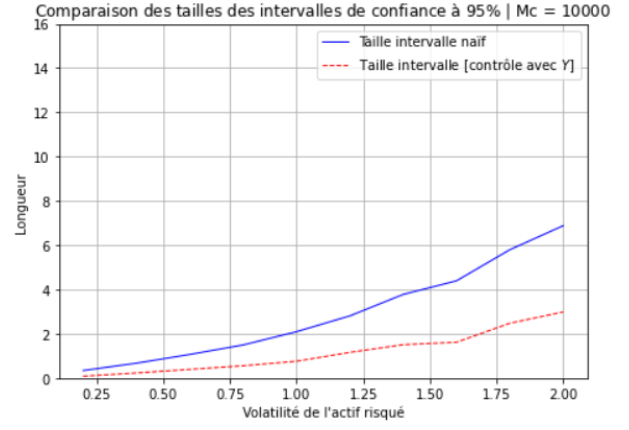
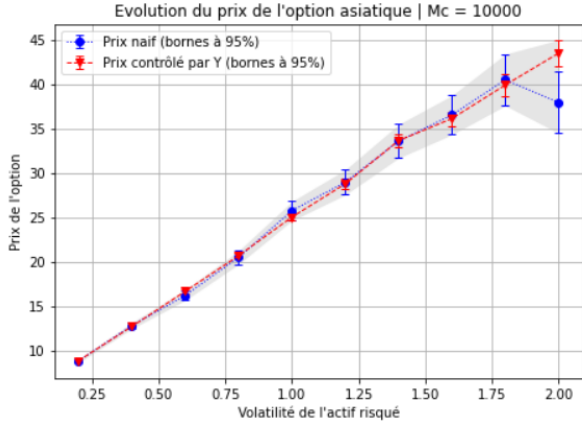


FIGURE 2 – Évaluation du prix de l'option asiatique avec un algorithme de Monte-Carlo classique et un algorithme utilisant la variable de contrôle Y .

1.3 Q3 : Seconde Variable de Contrôle

Toujours dans le but de réduire notre estimation de $A(0, S)$, on peut chercher une autre variable de contrôle qui nous mène à un estimateur ayant une variance plus faible que le précédent. Posons alors Z telle que

$$\begin{aligned} Z &= e^{-rT} \left(\exp \left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du \right) - K \right)_+ \\ &= e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du} - K \right) \mathbb{1}_{\left\{ e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du} > K \right\}} \\ &= e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du} - K \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du > \log(K) \right\}} \end{aligned}$$

Notons $G_Y = \frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du$. On a alors $G_Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} \log(S_0) + T \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) + \sqrt{\sigma \frac{T}{3}} G$ avec $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ d'après la question 1.1. Donc finalement, on peut écrire :

$$Z = e^{-rT} \left(e^{\frac{1}{T} \int_0^T \log(S_u) du} - K \right) \mathbb{1}_{\{G > d\}}$$

Pour pouvoir définir un nouvel estimateur de $A(0, S)$ à partir de Z , il nous faut pouvoir calculer analytiquement $\mathbb{E}[Z]$. On a $\mathbb{E}[Z] = e^{-rT} \mathbb{E}[e^{G_Y} \mathbb{1}_{\{G > d\}}] - e^{-rT} \mathbb{E}[K \mathbb{1}_{\{G > d\}}]$ par linéarité de l'espérance.

Calculons d'abord $e^{-rT} \mathbb{E}[K \mathbb{1}_{\{G > d\}}]$.

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E}[K \mathbb{1}_{\{G > d\}}] &= e^{-rT} K \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{G > d\}}] \\ &= e^{-rT} K \mathbb{Q}^*(G > d) \\ &= e^{-rT} K \mathbb{Q}^*(-G > d) \quad (G \stackrel{\mathcal{L}}{=} -G) \\ &= e^{-rT} K \mathcal{N}(-d) \quad (\mathcal{N} \text{ la fonction de répartition de } G) \end{aligned}$$

Calculons ensuite $e^{-rT} \mathbb{E}[e^{G_Y} \mathbb{1}_{\{G > d\}}]$.

$$\begin{aligned}
e^{-rt}\mathbb{E}[e^{G_Y} \mathbb{1}_{\{G>d\}}] &= e^{-rt} \int_d^{+\infty} e^{\log(S_0)+T(\frac{r}{2}-\frac{\sigma^2}{4})+\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 e^{-\frac{rT}{2}-\frac{\sigma^2 T}{4}} \int_d^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 e^{-\frac{rT}{2}-\frac{\sigma^2 T}{4}} e^{\frac{\sigma^2 T}{6}} \int_d^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}x+\frac{\sigma^2 T}{3})} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 e^{-\frac{T}{2}(r+\frac{\sigma^2}{6})} \int_d^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{\frac{T}{3}})^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 e^{-\frac{T}{2}(r+\frac{\sigma^2}{6})} \int_{d-\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (u = x - \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}) \\
&= S_0 e^{-\frac{T}{2}(r+\frac{\sigma^2}{6})} \mathbb{Q}^*(G > d - \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}) \\
&= S_0 e^{-\frac{T}{2}(r+\frac{\sigma^2}{6})} \mathcal{N}(\sigma\sqrt{\frac{T}{3}} - d) \quad (G \stackrel{\mathcal{L}}{=} -G)
\end{aligned}$$

Donc finalement, on obtient

$$\mathbb{E}[Z] = S_0 e^{-\frac{T}{2}(r+\frac{\sigma^2}{6})} \mathcal{N}\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{3}} - d\right) - K e^{-rT} \mathcal{N}(-d)$$

1.4 Q4 : Comparaison des Variables de Contrôle

Comparaison des résultats, analyse et interprétation

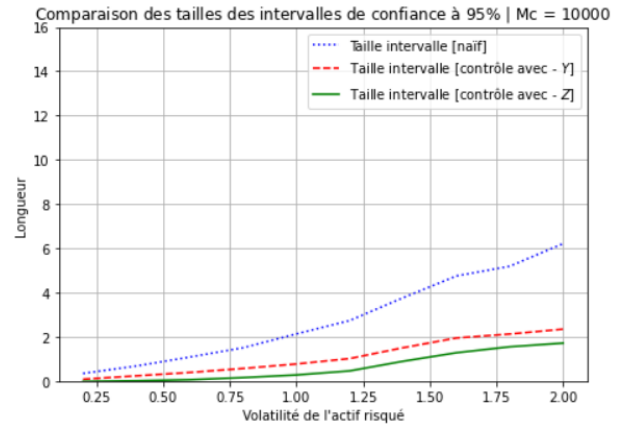
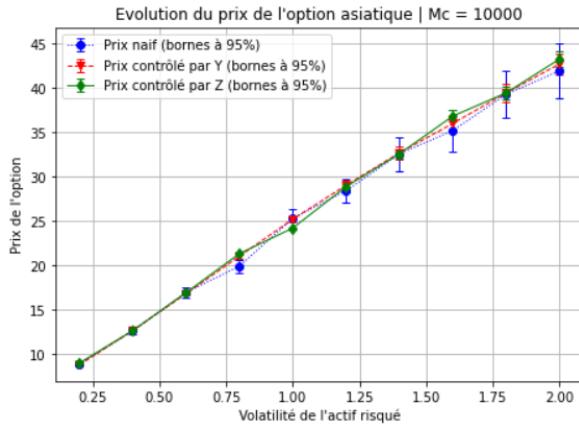


FIGURE 3 – Évaluation du prix de l'option asiatique avec un algorithme de Monte-Carlo classique, un algorithme utilisant la variable de contrôle Y et un algorithme utilisant la variable de contrôle Z .

On peut observer, sur la figure 3, les mêmes résultats que sur la figure 2. Si ce n'est que grâce au graphe traçant la taille de l'intervalle de confiance à 95% pour chacun des estimateurs du prix de l'option en fonction de la volatilité, on peut conclure que l'estimateur construit avec la variable de contrôle Z est encore plus précis que celui construit avec la variable de contrôle Y .

1.5 Q5 : Calcul de sensibilité

Méthode Pathwise

On souhaite calculer $\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial \sigma} (e^{-rT} \mathbb{E}[(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} - K)_+])$ sur un intervalle $I = [a; b]$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} - K \right)_+ \right] \right] &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} - K \right)_+ \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{S}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} - K \right)_+ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} \right) \right] \\
&= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} (W_{t_i} - \sigma t_i) \right) 1_{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} > K \right\}} \right]
\end{aligned}$$

Méthode Log-Likelihood ratio

On souhaite toujours calculer $\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} - K \right)_+ \right] \right)$ sur un intervalle $I = [a; b]$. Rappelons que, à l'aide du théorème de transfert et par changement de variable, on a :

$$\mathbb{E}[f(S_T)] = \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{1}{u\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\zeta(u)^2}{2}} du$$

avec $\zeta : u \mapsto \zeta(u) = \frac{\left(\log\left(\frac{u}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right)}{\sigma\sqrt{T}}$. On peut alors facilement identifier la densité de S_T . En notant g cette densité, on a, par théorème :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbb{E}[f(S_T)] = \mathbb{E} \left[f(S_T) \frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} (g(\sigma, f(S_T)))}{g(\sigma, f(S_T))} \right]$$

On note tout de même que :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \sigma} (g(\sigma, f(S_T)))}{g(\sigma, f(S_T))} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \log(g(\sigma, f(S_T)))$$

Pour le cas d'une option asiatique, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donc nécessairement, nous devons identifier la loi jointe du vecteur $(S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n})$ notée g . Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) un n -échantillon de ce vecteur. La propriété de Markov nous donne :

$$\begin{aligned}
g(x_1, x_2, \dots, x_n) &= g_1(x_1|S_0)g_2(x_2|x_1)\dots g_n(x_n|x_{n-1}) \\
\text{avec, } g_j(x_j|x_{j-1}) &= \frac{1}{x_j\sigma\sqrt{t_j - t_{j-1}}} \varphi(\zeta_j(x_j|x_{j-1})) \\
\varphi(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \\
\text{et, } \zeta_j &= \frac{\log\left(\frac{x_j}{x_{j-1}}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_j - t_{j-1})}{\sigma\sqrt{t_j - t_{j-1}}}
\end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \log(g(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \log(g_i(x_i|x_{i-1})) \right]$$

Et par dérivation composée, on a directement que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma} \log(g_i(x_i|x_{i-1})) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\log(\varphi(\zeta_i(x_i|x_{i-1}))) - \log(x_i\sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}) \right) \\
&= -\zeta_i \left(\sqrt{t_i - t_{i-1}} - \frac{\zeta_i}{\sigma} \right) - \frac{1}{\sigma}
\end{aligned}$$

Donc finalement, on a :

$$\mathcal{V} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n S_{t_i} - K \right)_+ \sum_{i=1}^n \left[-\zeta_i \left(\sqrt{t_i - t_{i-1}} - \frac{\zeta_i}{\sigma} \right) - \frac{1}{\sigma} \right] \right]$$

Résultats et interprétation

Les calculs ont été effectués avec les paramètres suivants $T = 1$, $r = 0.05$, $S_0 = 100$, $\sigma = 0.2$ et $K = 95$.

Méthode	Estimation de \mathcal{V}	Intervalle de confiance à 95%
Pathwise	17.431	[16.57603794 ; 18.28525602]
LLH	-1.805	[-3.37907723 ; -0.22994805]

TABLE 1 – Estimation de \mathcal{V} avec une méthode pathwise et une méthode log-likelihood ratio (LLH) avec 10000 itérations de Monte-Carlo.

On obtient deux résultats sensiblement différents avec deux méthodes estimant la même quantité. En particulier, la méthode LLH nous donne une estimation négative. En effectuant quelques recherches, les travaux de W. Hürlimann ([1]) montrent que la méthode d'estimation de \mathcal{V} par la méthode LLH ne peut aboutir, et c'est finalement ce que l'on constate par nos calculs.

2 Exercice 2 : Delayed Start European Options

2.1 Q1 : Formulation explicite de l'espérance

On sait que, sous les hypothèses faites ici, le prix d'un call européen au temps t , fixé, quelconque dans l'intervalle $[0, T]$ est donné par

$$C(t, S) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K)_+ | S_t] = S_t \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (4)$$

Dans la suite, il peut être utile de noter que $\{e^{-rt} \frac{S_t}{S_0}\}_{t \in [0, T]}$ est une martingale, et que, en particulier

$$\mathbb{E}[e^{-rt} \frac{S_t}{S_0}] = 1, \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

On s'intéresse, pour $\lambda > 0$ et $t_1 \in [0, T]$ fixés, au calcul analytique du prix d'une option défini par

$$\Pi_{DS} := e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - \lambda S_{t_1})_+]$$

On peut cependant écrire que

$$\begin{aligned} \Pi_{DS} &:= e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - \lambda S_{t_1})_+] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[(S_T - \lambda S_{t_1})_+ | S_{t_1}]\right] \\ &= e^{-r(T-t_1)} e^{-rt_1} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[(S_T - \lambda S_{t_1})_+ | S_{t_1}]\right] \\ &= e^{-rt_1} \mathbb{E}[S_{t_1} \mathcal{N}(d_1) - \lambda S_{t_1} e^{-r(T-t_1)} \mathcal{N}(d_2)] \quad (4) \\ &= S_0 \mathbb{E}\left[e^{-rt_1} \frac{S_{t_1}}{S_0} (\mathcal{N}(d_1) - \lambda e^{-r(T-t_1)} \mathcal{N}(d_2))\right] \\ &= S_0 (\mathcal{N}(d_1) - \lambda e^{-r(T-t_1)} \mathcal{N}(d_2)) \mathbb{E}\left[e^{-rt_1} \frac{S_{t_1}}{S_0}\right] \\ &= S_0 (\mathcal{N}(d_1) - \lambda e^{-r(T-t_1)} \mathcal{N}(d_2)) \quad (5) \end{aligned}$$

avec $d_1 := \frac{\log(\frac{1}{\lambda}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t_1)}{\sigma\sqrt{T-t_1}}$ et $d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t_1}$.

2.2 Q2 : Comparaison d'Algorithmes

Comparaison des résultats, analyse et interprétation

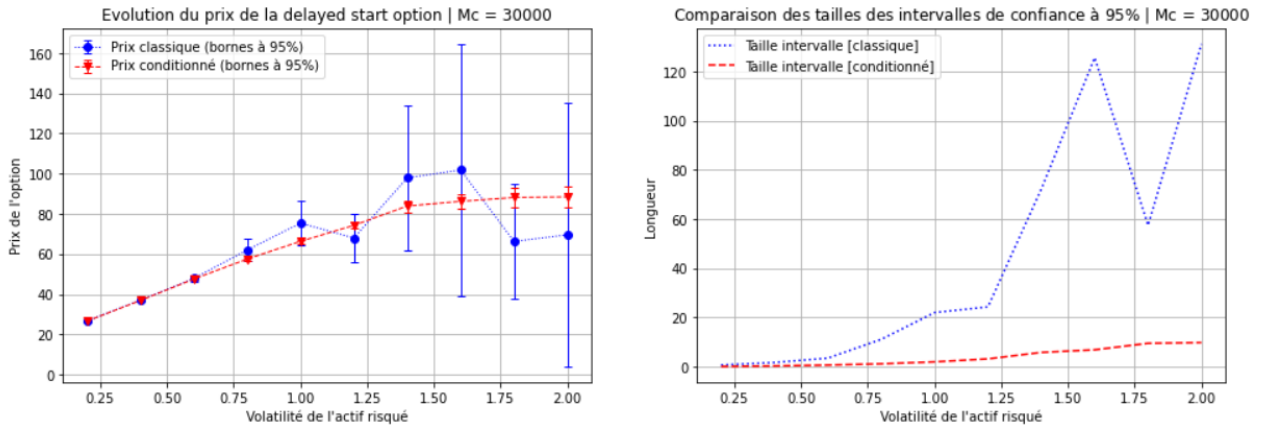


FIGURE 4 – Évaluation de Π_{DS} avec deux algorithmes de Monte-Carlo différents.

Sur la figure 4, on constate que la précision de l'estimation par l'algorithme de Monte-Carlo conditionnel est bien supérieure à celle donnée par le premier algorithme. Le gain sur la variance de l'estimateur est immense lorsque la vol de l'actif risqué est grande. On aurait sans doute pu avoir des estimations plus précises en augmentant le nombre de tirages de Monte-Carlo. Dans un souci de limiter le coût de calcul, il faudrait repenser notre implémentation des algorithmes de manière à s'affranchir des boucles itératives (en vectorisant le code).

3 Exercice 3 : American Put Option

On cherche ici à calculer le prix d'une option américaine qui est donné de la manière suivante :

$$p = \sup_{\tau \in [0, \dots, T]} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (K - S_\tau)^+ \right]$$

On passera par l'approximation suivante :

$$\tilde{p} = \sup_{\tau \in \{t_0, \dots, t_n\}} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} (K - S_\tau)^+ \right]$$

Cette approximation est basée sur le principe que le prix d'une option bermudienne converge vers le prix d'une option américaine lorsque le choix de date d'exécution tend vers l'infini, i.e : $\tilde{p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$.

Notre méthode sera la suivante, plutôt que de déterminer directement le prix de l'option américaine, on va déterminer le prix d'une option bermudienne de même payoff et même sous-jacent et l'on sait que lorsque n (le nombre d'instant où on peut exécuter l'option) tend vers l'infini, alors le prix de l'option bermudienne tend vers le prix de l'option américaine.

Remarque 3.1. $\tilde{p} \leq p$ car notre option bermudienne nous donne moins de liberté que l'option américaine, son prix est donc moins élevé. Donc on trouvera "juste" une borne inférieure au prix de l'option américaine.

Dans la suite, on pose $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ qui à x associe $f(x) = (K - x)_+$. On rappelle l'algorithme de Longstaff-Schwartz

Algorithm 1 Algorithme de Longstaff-Schwartz

```

for  $j = 1, \dots, M$ 
   $\tau_n \leftarrow t_n$ 
  Compute  $(\alpha_{n,l})_{1 \leq l \leq L}$ 
  for  $k = n - 1, \dots, 0$ 
     $\tau_k \leftarrow t_k 1_A + \tau_{k+1} 1_{\bar{A}}$ 
    Compute  $(\alpha_{k,l})_{1 \leq l \leq L}$ 
  end for
end for

```

3.1 Q1 : Calcul avec l'algorithme de Longstaff-Schwartz

Le point clé de cet algorithme est le calcul, à chaque temps k , de la suite $(\alpha_{k,l})_{1 \leq l \leq L}$. Cette suite est obtenue de manière à minimiser l'expression

$$\mathcal{J}(\alpha_k) := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\left(e^{-r(\tau_{j,k+1} - t_k)} f(S_{\tau_{j,k+1}}^j) - \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l} \mathcal{P}_l(S_{t_k}^j) \right)^2 \right]$$

à chaque temps k . On note (P_1, P_2, \dots, P_L) la base polynomiale sur laquelle s'appuie notre algorithme, et $A := \{f(S_{t_k}^j) \geq \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l} \mathcal{P}_l(S_{t_k}^j)\}$ dépend directement des $(\alpha_{k,l})_{1 \leq l \leq L}$. Soit $k \in [0, n]$ fixé, on propose, dans la suite, deux méthodes pour calculer $(\alpha_{k,l})_{1 \leq l \leq L}$.

Une approche optimale pour calculer la suite $(\alpha_{k,l})_{1 \leq l \leq L}$

En dérivant \mathcal{J} par rapport à un α_{k,l_0} fixé, on a

$$-\sum_{j=1}^M \left[\mathcal{P}_{l_0}(S_{t_k}^j) \left(e^{-r(\tau_{j,k+1} - t_k)} f(S_{\tau_{j,k+1}}^j) - \sum_{l=1}^L \alpha_{k,l} \mathcal{P}_l(S_{t_k}^j) \right) \right] = 0$$

Et calculer les $(\alpha_{k,l})_{1 \leq l \leq L}$ vérifiant cette relation revient à résoudre le problème linéaire suivant

$$H\alpha = \tilde{P}$$

avec $H \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R})$ telle que $H_{l_1, l_2} := \sum_{j=1}^M \mathcal{P}_{l_1}(S_{t_k}^j) \mathcal{P}_{l_2}(S_{t_k}^j)$, $\alpha \in \mathcal{M}_{L,1}(\mathbb{R})$ tel que $\alpha_l := \alpha_{k,l}$ et $\tilde{P} \in \mathcal{M}_{L,1}(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{P}_l := \sum_{j=1}^M e^{-r(\tau_{j,k+1} - t_k)} f(S_{\tau_{j,k+1}}^j) \mathcal{P}_l(S_{t_k}^j)$. Le système est un système à L équations pour L inconnues, il est donc bien posé. On note que \tilde{H} est de rang L par construction, donc H est inversible et il existe une unique solution au système linéaire ci-dessus.

Comparaison des résultats, analyse et interprétation

3.2 Q2 : Frontière d'exercice

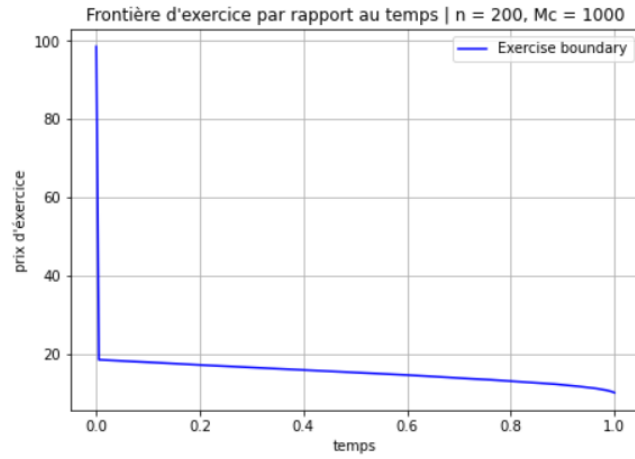


FIGURE 5 – Frontière d'exercice pour un put bermudien.

Le graphe suivant nous donne la frontière d'exercice d'un put bermudien selon la date à laquelle on se situe. D'après ce graphe, si à un instant t le prix de l'actif atteint cette frontière alors on doit exercer l'option car c'est le moment le plus optimal.

On peut observer un peu mieux la frontière d'exercice en regardant le plot sans le temps initial :

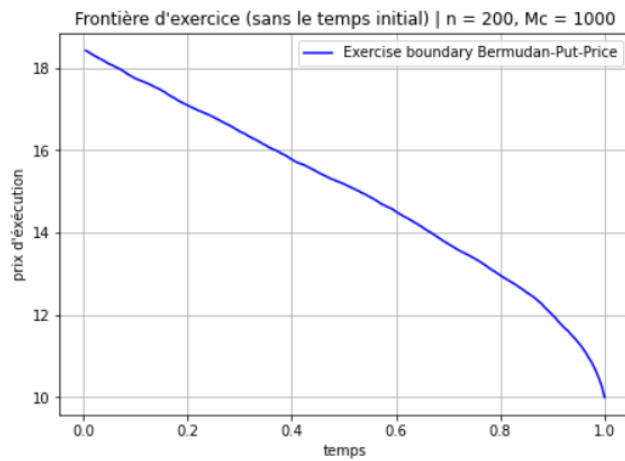


FIGURE 6 – Frontière d'exercice pour un put bermudien (sans le temps initial).

Références

- [1] W. HÜRLIMANN, *Failure of the likelihood ration method : the discrete arithmetic asian call option case.*, IJRASS, 2015.