

# Rapport de Stage

Martin Duguey<sup>1</sup>,  
Encadrants : Olivier Lafitte<sup>2,3</sup>, Bérénice Grec<sup>4</sup>

15 septembre 2021

## Résumé

L'étude du fonctionnement d'un réacteur nucléaire peut nécessiter le recours simultané à deux types de phénomènes : l'un, thermohydraulique, qui régit le comportement du fluide dans le coeur du réacteur (sa température, ses propriétés...) et l'autre, neutronique, décrivant les mouvements des neutrons relatifs à la fission dans le coeur du réacteur. Ces deux modèles, présentés dans le papier de M. Dellacherie Stéphane et M. Lafitte Olivier (voir [4]), peuvent s'écrire comme un système couplé de deux équations. L'objet de ce stage est de résoudre analytiquement le système des deux équations écrit dans [4], qui couplées forment une équation différentielle non-linéaire. Des études ont déjà été menées pour résoudre numériquement cette équation. Comme présenté dans [4], le système peut être résolu en résolvant numériquement les deux équations de manière séquentielle, mais pour des raisons de coût de calcul, ce ne sont pas des méthodes qui nous intéressent ici. Les résultats présentés dans le papier écrit par M. Dellacherie Stéphane, M. Lafitte Olivier, M. Jamelot Erell et M. Muhammad Riyaz (voir [1]), ont été obtenus en utilisant une méthode d'intégration numérique directement sur l'équation résultant du couplage. Une autre méthode est introduite dans le papier écrit par M. Olivier Lafitte et M. François Dubois (voir [3]), utilisant un schéma de Crank-Nicolson.

## Introduction

Nous allons étudier la question de la recherche de  $k_{eff}$  dans le cas d'un système couplé donnant lieu à une équation différentielle non-linéaire d'ordre 1. La question a déjà été traitée de manière explicite (voir [4] et [1]), mais l'idée est ici d'adapter une méthode discrète de résolution de l'équation, traitée dans un cas modèle (voir [3]), à un cas réel faisant suite à ce qui a été fait dans un précédent papier (voir [1]). Afin de comprendre les enjeux du problème, on reprend ici les calculs qui, d'un système composé d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 et d'une équation différentielle non-linéaire d'ordre 2, mènent à l'équation sur laquelle nous allons travailler.

On peut ensuite, dans certains cas simples écrire la solution analytique du problème, grâce notamment aux polynômes d'interpolation de Lagrange et à des régressions linéaires (voir [2] et [5]). L'avantage est qu'ici, par interpolation de Lagrange, on a directement l'expression littérale des coefficients du polynôme en fonction des valeurs et points connus des termes approchés. De cette façon, les calculs pour obtenir les expressions littérales des fonctions du second membre de notre équation différentielle sont plus simples. Ceci est lié aux changements de variables introduits dans [2].

Enfin, de manière à justifier la cohérence de notre étude, nous chercherons à caractériser la solution analytique obtenue dans les cas simples vus précédemment. Nous allons entre autres justifier l'existence et l'unicité de notre solution avec l'application du théorème de Lax-Milgram (voir [8] et [7]), et utiliser des notions tel que le principe du maximum (voir [6]) pour préciser son allure.

L'objectif étant de résoudre numériquement notre problème de recherche de  $k_{eff}$ , nous allons présenter deux façons de voir cette recherche, toutes les deux utilisant une méthode de Newton. La première reprenant en partie la vision du problème de [1] avec des calculs adaptés, la seconde en cherchant à implémenter la méthode décrite dans [3] et [2].

## 1 Problème de couplage d'une équation de thermohydraulique et d'une équation de neutronique

Dans cette partie, nous allons dans un premier temps introduire et fixer les points clés du problème. Une fois le cadre posé, nous allons voir qu'il est possible dans certains cas de calculer analytiquement la solution du problème établi. Enfin,

---

1. Sup Galilée, spécialité M.A.C.S, Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord, F-93430, Villetaneuse, France

2. International Research Laboratory 3457 du Centre National de la Recherche Scientifique, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, QC, Canada.

3. Université Sorbonne Paris Nord, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), 99 Avenue J.-B. Clément F-93430, Villetaneuse Cedex, France.

4. Université Paris Descartes, Sorbonne Paris Cité, MAP5, CNRS (UMR 8145), 45 rue des Saints Pères 75270, Paris Cedex 06, France.

nous verrons que dans ces cas, il est tout à fait possible de caractériser les solutions calculables du point précédent. Les notions qui sont détaillées dans les différentes parties qui suivent, s'appuient sur les ressources bibliographiques et sur des points de cours vus durant les deux premières années de la spécialité M.A.C.S.

## 1.1 Introduction au modèle et couplage de deux équations thermohydraulique et neutronique

On s'intéresse au système thermohydraulique-neutronique simplifié en dimension 1 suivant :

$$D_e \frac{dh}{dz} = \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi, \quad (1a)$$

$$-\frac{d}{dz} \left( D(h) \frac{d\phi}{dz} \right) + \left[ \Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi = 0 \quad (1b)$$

où on cherche  $\phi \in H_0^1([0; L])$  car  $\phi(0) = \phi(L) = 0$  et telle que  $\phi \geq 0$ ,  $h \in \mathcal{C}^1([0; L])$  telle que  $h(0) = h_e$  et  $h(L) = h_s$ . De plus,  $\mathbb{E}$  l'énergie, en Joule, produite par la fission,  $D$  le coefficient de diffusion,  $\Sigma_f$  la section efficace de fission,  $\Sigma_a$  la section efficace d'absorption, et  $\nu$  le nombre moyen de neutrons produits par la fission. Les équations pour le fluide ont été résolues par ailleurs,  $D_e$  est le débit du fluide caloporteur.

Pour pouvoir calculer une solution analytique du système, on choisit de faire l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.1.** *Il existe  $h_{min} < h_{max}$  tels que  $D$ ,  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_f$  sont continues sur l'intervalle  $[h_{min}; h_{max}]$ . De plus, Il existe  $\alpha_a > 0$ ,  $\alpha_f > 0$  et  $\alpha_D > 0$  des constantes telles que  $\forall h \in [h_{min}, h_{max}]$ ,  $D(h) \geq \alpha_D$ ,  $\Sigma_a(h) \geq \alpha_a$  et  $\Sigma_f(h) \geq \alpha_f$ .*

On suppose, dans la suite, que les fonctions  $D$ ,  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_f$  vérifient l'hypothèse 1.1. Les démonstrations des lemmes suivants seront faites ultérieurement en ramenant l'étude sur  $[h_e, h_s]$ , avec  $h_e < h_s$ , à une étude sur  $[-1; 1]$ .

**Lemme 1.2.** *Il existe une unique fonction  $X \in \mathcal{C}^2([h_e; h_s])$  qui vérifie :*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dh} [D(h) \nu \Sigma_f(h) \frac{dX}{dh}(h)] &= \frac{\Sigma_a(h)}{\nu \Sigma_f(h)}, \\ X(h_e) &= 0, \\ X(h_s) &= 0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* (cf. lemme 1.8) □

**Lemme 1.3.** *Il existe une unique fonction  $Y \in \mathcal{C}^2([h_e; h_s])$  qui vérifie :*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dh} [D(h) \nu \Sigma_f(h) \frac{dY}{dh}(h)] &= 1, \\ Y(h_e) &= 0, \\ Y(h_s) &= 0. \end{aligned}$$

*Démonstration.* (cf. lemme 1.13) □

**Proposition 1.4.** *Soit  $(\varphi, h)$  une solution dans  $H_0^1([0; L]) \times \mathcal{C}^1([0; L])$  de (1) vérifiant  $h(0) = h_e$ ,  $h(L) = h_s$ . Alors la fonction  $h$  est solution de l'équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre 1.*

$$\left( \frac{dh}{dz} \right)^2 = 2(\nu \Sigma_f(h))^2 \left[ \frac{Y(h)}{k_{eff}} - X(h) \right]. \quad (2)$$

*Démonstration.* En factorisant le terme linéaire en  $\phi$  dans (1b), on fait apparaître l'expression suivante :

$$-\frac{d}{dz} \left( D(h) \frac{d\phi}{dz} \right) + \left[ \frac{\Sigma_a(h)}{\nu \Sigma_f(h)} - \frac{1}{k_{eff}} \right] \phi \nu \Sigma_f(h) = 0. \quad (3)$$

On utilise alors les lemmes 1.2 et 1.3, pour substituer les expressions de  $\frac{\Sigma_a(h)}{\nu \Sigma_f(h)}$  et 1 dans (3). On a alors :

$$-\frac{d}{dz} \left( D(h) \frac{d\phi}{dz} \right) + \left[ -\frac{d}{dh} (D(h) \nu \Sigma_f(h) \frac{dX}{dh}(h)) + \frac{1}{k_{eff}} \frac{d}{dh} (D(h) \nu \Sigma_f(h) \frac{dY}{dh}(h)) \right] \phi \nu \Sigma_f(h) = 0.$$

On remarque que (1a) donne :  $\nu \Sigma_f(h) \phi = \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} \frac{dh}{dz}$ . Donc, par substitution, on obtient :

$$-\frac{d}{dz} \left( D(h) \frac{d\phi}{dz} \right) - \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} \left[ \frac{d}{dh} (D(h) \nu \Sigma_f(h) \frac{dX}{dh}(h)) - \frac{1}{k_{eff}} \frac{d}{dh} (D(h) \nu \Sigma_f(h) \frac{dY}{dh}(h)) \right] \frac{dh}{dz} = 0. \quad (4)$$

En fait, par dérivation composée, on remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} \left[ \frac{d}{dh} (D(h) \nu \Sigma_f(h)) \frac{dX}{dh}(h) - \frac{1}{k_{eff}} \frac{d}{dh} (D(h) \nu \Sigma_f(h)) \frac{dY}{dh}(h) \right] \frac{dh}{dz} &= \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} \frac{d}{dz} (D(h) \nu \Sigma_f(h)) \frac{dX}{dh}(h) \\ &- \frac{1}{k_{eff}} D(h) \nu \Sigma_f(h) \frac{dY}{dh}(h) \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $z$ , on a (4) qui devient :

$$-D(h) \frac{d\phi}{dz} - \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} [D(h) \nu \Sigma_f(h) \left( \frac{dX}{dh}(h) - \frac{1}{k_{eff}} \frac{dY}{dh}(h) \right) - C_0] = 0. \quad (5)$$

avec  $C_0$  la constante qui apparaît du fait de l'intégration par rapport à  $z$ . On note qu'il n'y pas de constante d'intégration qui apparaît pour le terme en  $\frac{d\phi}{dz}$ , ou du moins elle est nulle, du fait que  $\phi \in H_0^1([0; L])$ . Ensuite, de manière à faire apparaître une nouvelle fois le facteur  $\phi \nu \Sigma_f(h)$ , on multiplie (5) par  $\frac{\phi}{D(h)}$ . On obtient alors :

$$-\phi \frac{d\phi}{dz} - \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} [\phi \nu \Sigma_f(h) \left( \frac{dX}{dh}(h) - \frac{1}{k_{eff}} \frac{dY}{dh}(h) \right) - \frac{\phi}{D(h)} C_0] = 0.$$

De la même façon que précédemment, en utilisant la relation donnée par (1a) pour remplacer l'expression de  $\phi \nu \Sigma_f(h)$ , on a donc :

$$-\phi \frac{d\phi}{dz} - \left( \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} \right)^2 \left[ \frac{dX}{dh}(h) - \frac{1}{k_{eff}} \frac{dY}{dh}(h) - \frac{C_0}{\nu \Sigma_f(h) D(h)} \right] \frac{dh}{dz} = 0 \quad (6)$$

Mais, on remarque :

$$\begin{aligned} -\phi \frac{d\phi}{dz} &= \frac{d}{dz} \left( -\frac{1}{2} \phi^2 \right), \\ \frac{dh}{dz} \left( \frac{dX}{dh}(h) - \frac{1}{k_{eff}} \frac{dY}{dh}(h) \right) &= \frac{d}{dz} \left( X - \frac{1}{k_{eff}} Y \right) \quad (\text{dérivation composée}), \\ \frac{dh}{dz} \left( \frac{C_0}{\nu \Sigma_f(h) D(h)} \right) &= C_0 \frac{d}{dz} (P(h(z))) \quad (\text{dérivation composée}). \end{aligned}$$

avec  $P(h(z)) := \int_{h_e}^{h(z)} \frac{ds}{\nu \Sigma_f(s) D(s)}$ . Et finalement, en intégrant par rapport à  $z$ , on a :

$$-\frac{1}{2} \phi^2 - \left( \frac{\nu D_e}{\mathbb{E}} \right)^2 [X(h) - \frac{1}{k_{eff}} Y(h) - C_0 P(h) - D_0] = 0. \quad (7)$$

Mais comme  $\phi(0) = \phi(L) = 0$  et que  $X(h_e) = X(h_s) = Y(h_e) = Y(h_s) = 0$ , on en déduit que  $C_0 = D_0 = 0$  grâce à  $P(h_e) = 0$  et  $P(h_s) > 0$ . Donc, en substituant l'expression de  $\phi^2$  par  $\left( \frac{D_e}{\mathbb{E} \Sigma_f(h)} \frac{dh}{dz} \right)^2$ , obtenue grâce à (1a), et en manipulant l'expression (7), on obtient :

$$\left( \frac{dh}{dz} \right)^2 = 2(\nu \Sigma_f(h))^2 \left[ \frac{Y(h)}{k_{eff}} - X(h) \right].$$

□

## 1.2 Recherche de solutions analytiques dans des cas simples

Une fois l'équation différentielle (2) établie, on peut approcher l'expression du second membre. À une condition tout de même qui est que l'on connaisse l'expression des fonctions  $D$ ,  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_f$ . En réalité, on ne connaît pas l'expression de telles fonctions mais des valeurs obtenues en certains points permettent d'en donner des approximations.

En plus de ce tableau 1, on donne aussi les quantités  $T_e$  et  $T_s$  respectivement égales à 559.15 et 633.15.

**Remarque 1.5.** *On note que le tableau de données 1 renseigne des valeurs pour des températures  $T$  alors que l'on a considéré que  $D$ ,  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_f$  étaient des fonctions de l'enthalpie  $h$ . En réalité,  $h$  est proportionnel à  $T$  ( $h = C_p T$ ,  $C_p$  capacité calorifique à pression constante). On fait donc l'approximation de voir ces fonctions comme des fonctions dépendant de la température.*

Une fois que l'on a ce tableau de valeurs, on peut réaliser des interpolations de Lagrange ou des régressions linéaires sur les quantités qui nous intéressent de manière à donner une bonne approximation du second membre.

Afin de poursuivre notre étude sur un domaine en coordonnées adimensionnées, on choisit d'adapter nos relations obtenues sur  $[h_e; h_s]$  à l'intervalle  $[-1; 1]$ . Pour ce faire, on introduit les notations suivantes :

| quantité                      | T1        | T2        | T3        |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $T$ (en $K$ )                 | 585.15    | 597.15    | 617.15    |
| $D$ (en $cm$ )                | 0.2480    | 0.2490    | 0.2520    |
| $\Sigma_a$ (en $cm^{-1}$ )    | 0.0509    | 0.0501    | 0.0478    |
| $\nu\Sigma_f$ (en $cm^{-1}$ ) | 0.0531    | 0.0516    | 0.0482    |
| $(D\nu\Sigma_f)^{-1}$ (s.u.)  | 75.9380   | 77.831774 | 82.329161 |
| $D\nu\Sigma_f$ (s.u.)         | 0.0131686 | 0.0128482 | 0.0121464 |
| $D\Sigma_a$ (s.u.)            | 0.0126229 | 0.0124249 | 0.0125085 |

TABLE 1 – Valeurs des fonctions  $D$ ,  $\Sigma_a$  et  $\Sigma_f$  prises en 3 points d'enthalpie différents

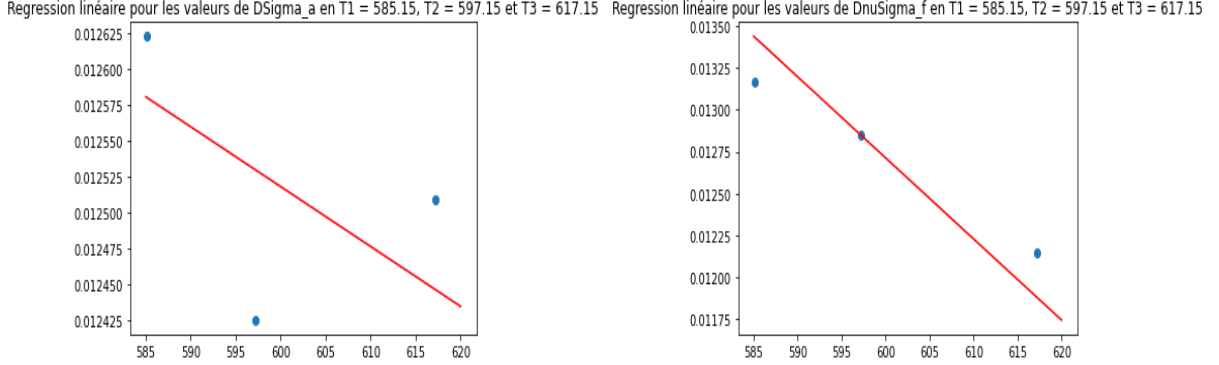


FIGURE 1 – Droite de régression linéaire sur l'intervalle  $[h_e; h_s]$ , pour les quantités  $D(h)\Sigma_a(h)$  et  $D(h)\nu\Sigma_f(h)$

- ◇  $u$  : fonction de  $[h_e; h_s]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $u'(h) = \frac{1}{D(h)\nu\Sigma_f(h)}$ .
- ◇  $x$  : la fonction de  $[h_e; h_s]$  dans  $[-1; 1]$  définie comme  $x(h) := -1 + 2 \frac{u(h) - u(h_e)}{u(h_s) - u(h_e)}$ .
- ◇  $\theta$  : la fonction de  $[0; L]$  dans  $[0; \frac{\pi}{2}]$  définie par l'égalité  $x(h(z)) := -1 + 2 \sin^2(\theta(z))$  et telle que  $x(0) = -1$  et  $x(L) = 1$ . Par abus de notation,  $x$  désigne aussi la fonction de  $[0; L]$  dans  $[-1; 1]$ .

### Calcul de $X$ et $Y$ avec régression linéaire sur le second membre

**Remarque 1.6.** Les calculs suivants ont été réalisés pour des fonctions  $X$  et  $Y$  de  $x$ , variable de l'intervalle  $[-1; 1]$ , grâce aux lemmes 1.8 et 1.13 de la partie 1.3.

On commence d'abord par réaliser notre régression linéaire pour  $D(h)\Sigma_a(h)$  et  $D(h)\nu\Sigma_f(h)$  sur l'intervalle  $[h_e; h_s]$  (voir figure 1).

On obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} D\Sigma_a(h(x)) &= b_1^{D\Sigma_a} x + b_0^{D\Sigma_a}, \\ D\nu\Sigma_f(h(x)) &= b_1^{D\nu\Sigma_f} x + b_0^{D\nu\Sigma_f} \end{aligned}$$

avec  $b_1^{D\Sigma_a} = -4.1755 \cdot 10^{-6}$ ,  $b_0^{D\Sigma_a} = 0.01502$ ,  $b_1^{D\nu\Sigma_f} = -4.8397 \cdot 10^{-5}$  et  $b_0^{D\nu\Sigma_f} = 0.04175$ . Grâce à la variable  $x$ , on peut finalement écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 X}{dx^2}(x) &= (b_1^{D\Sigma_a} x + b_0^{D\Sigma_a}) \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2, \\ -\frac{d^2 Y}{dx^2}(x) &= (b_1^{D\nu\Sigma_f} x + b_0^{D\nu\Sigma_f}) \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

En intégrant successivement par rapport à  $x$  et en veillant à respecter les conditions  $X(-1) = X(1) = Y(-1) = Y(1) = 0$ , on obtient :

$$X(x) = \left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2 (1 - x^2) \left(\frac{b_0^{D\Sigma_a}}{2} + \frac{b_1^{D\Sigma_a}}{6}x\right), \quad (8a)$$

$$Y(x) = \left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2 (1 - x^2) \left(\frac{b_0^{D\nu\Sigma_f}}{2} + \frac{b_1^{D\nu\Sigma_f}}{6}x\right), \quad (8b)$$

$$(8c)$$

### Calcul de X et Y avec interpolation de Lagrange sur le second membre

**Remarque 1.7.** Les calculs suivants ont été réalisés pour des fonctions  $X$  et  $Y$  de  $x$ , variable de l'intervalle  $[-1; 1]$ , grâce aux lemmes 1.8 et 1.13 de la partie 1.3.

On raisonne de la même manière que dans la section 1.2. On se donne les points  $x_1, x_2, x_3$  qui sont en fait les images des points de température  $T_1, T_2, T_3$  par la fonction  $x$  présentée dans la partie 1.3. Donc, on voit les seconds membres des équations sur  $X$  et  $Y$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D(x)\Sigma_a(x) \left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2 &= [\alpha_1(x - x_2)(x - x_3) + \alpha_2(x - x_1)(x - x_3) + \alpha_3(x - x_1)(x - x_2)] \left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2, \\ D(x)\nu\Sigma_f(x) \left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2 &= [\beta_1(x - x_2)(x - x_3) + \beta_2(x - x_1)(x - x_3) + \beta_3(x - x_1)(x - x_2)] \left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2, \\ \text{avec } \alpha_1 &:= \frac{D(x_1)\Sigma_a(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \alpha_2 := \frac{D(x_2)\Sigma_a(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \alpha_3 := \frac{D(x_3)\Sigma_a(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ \text{et } \beta_1 &:= \frac{D(x_1)\nu\Sigma_f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \beta_2 := \frac{D(x_2)\nu\Sigma_f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, \beta_3 := \frac{D(x_3)\nu\Sigma_f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{aligned}$$

Et finalement, en intégrant successivement par rapport à  $x$  et en veillant à respecter les conditions  $X(-1) = X(1) = Y(-1) = Y(1) = 0$ , on obtient, en posant  $\gamma := \left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2$  :

$$X(x) = \gamma(1 - x^2) \left[ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{12} x^2 + \frac{1}{6} [(x_2 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_2)\alpha_3] x + \mathcal{C}_1 \right], \quad (9a)$$

$$Y(x) = \gamma(1 - x^2) \left[ \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{12} x^2 + \frac{1}{6} [(x_2 + x_3)\beta_1 + (x_1 + x_3)\beta_2 + (x_1 + x_2)\beta_3] x + \mathcal{D}_1 \right] \quad (9b)$$

$$\mathcal{C}_1 := -\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{12} - \frac{1}{2}(x_2x_3\alpha_1 + x_1x_3\alpha_2 + x_1x_2\alpha_3), \quad (9c)$$

$$\mathcal{D}_1 := -\frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{12} - \frac{1}{2}(x_2x_3\beta_1 + x_1x_3\beta_2 + x_1x_2\beta_3) \quad (9d)$$

### 1.3 Caractérisation de la solution explicite dans ces cas simples

On peut effectuer quelques manipulations sur les notations introduites dans la partie 1.2. En particulier, on peut écrire,  $\forall h \in [h_e, h_s]$ ,  $u(h)$  en fonction de  $x(h)$  :

$$u(h) = x(h) \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} + \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} + u(h_e)$$

Ceci permet donc d'écrire que  $u'(h) = x'(h) \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}$ ,  $\forall h \in [h_e, h_s]$ . De façon plus formelle, on a :

$$\frac{du}{dh}(h) = \frac{dx}{dh}(h) \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}, \forall h \in [h_e, h_s].$$

D'autre part, les lemmes 1.2 et 1.3 doivent être adaptés à l'intervalle  $[-1; 1]$ . C'est ce que l'on va chercher à faire. Remarquons que, soit  $\mathcal{X}(x) = X(h(x))$  la règle de dérivées des fonctions composées implique :

$$\mathcal{X}'(x) = \frac{dX}{dh} h'(x) = \frac{1}{x'(h(x))} \frac{dX}{dh}(h(x)) \quad \text{et, } \mathcal{X}''(x) = h'(x) \frac{d}{dh} (\mathcal{X}'(h(x))) \quad (10)$$

Sans perte de généralités, on peut écrire :

$$-\frac{d}{dh} \left[ \frac{1}{u'(h)} \frac{dX}{dh}(h) \right] = \frac{D(h)\Sigma_a(h)}{D(h)\nu\Sigma_f(h)} \quad \text{et donc} \quad -\frac{d}{dh} \left[ \frac{1}{u'(h)} \frac{dX}{dh}(h) \right] = D(h)\Sigma_a(h) u'(h)$$

En remplaçant  $u'(h)$  par son expression en fonction de  $x'(h)$ , on a :

$$-\frac{d}{dh} \left[ \frac{1}{x'(h) \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}} \frac{dX}{dh}(h) \right] = D(h) \Sigma_a(h) x'(h) \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}$$

soit,  $-\frac{2}{u(h_s) - u(h_e)} \frac{d}{dh} \left[ \frac{1}{x'(h)} \frac{dX}{dh}(h) \right] = D(h) \Sigma_a(h) x'(h) \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}$

Et finalement, on a :

$$-\frac{d}{dh} \left[ \frac{1}{x'(h)} \frac{dX}{dh}(h) \right] = D(h) \Sigma_a(h) x'(h) \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2 \quad (11)$$

$$-\frac{d}{dh} \left[ \frac{1}{x'(h)} \frac{dY}{dh}(h) \right] = \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \quad (12)$$

Ainsi, en utilisant (10), on a que (11) est équivalent à :

$$-\frac{d^2 X}{dx^2}(x(h)) = D(x(h)) \Sigma_a(x(h)) \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2$$

Et (12) est équivalent, en utilisant la relation liant  $x$  à  $u$  et la définition de  $u$ , à :

$$-\frac{d^2 Y}{dx^2}(x(h)) = D(x(h)) \nu \Sigma_f(x(h)) \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2$$

De plus, comme on souhaite transposer les relations valables sur  $[h_e; h_s]$  à l'intervalle  $[-1; 1]$ , on garde  $X(-1) = X(1) = Y(-1) = Y(1) = 0$ . Dans la suite, on fera les abus de notation suivants :  $X(x) := X(x(h))$ ,  $Y(x) := Y(x(h))$ ,  $D(x) := D(x(h))$ ,  $\Sigma_a(x) := \Sigma_a(x(h))$  et  $\Sigma_f(x) := \Sigma_f(x(h))$ .

Ainsi le lemme 1.2 est équivalent sur  $[-1; 1]$  à :

**Lemme 1.8.** *Il existe une unique fonction  $X \in C^2([-1; -1])$  qui vérifie :*

$$-\frac{d^2 X}{dx^2}(x) = D(x) \Sigma_a(x) \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2, \text{ sur } ]-1; 1[ \quad (13a)$$

$$X(-1) = 0, \quad (13b)$$

$$X(1) = 0. \quad (13c)$$

Posons  $f(x) := D(x) \Sigma_a(x) \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2$ ,  $\forall x \in [-1; 1]$ . Comme on suppose être dans le cadre de l'hypothèse 1.1,  $f$  est continue sur  $[-1; 1]$  donc  $f \in L^2([-1; 1])$ .

Avant de démontrer le lemme, on introduit les propositions suivantes :

**Proposition 1.9.** *Soit  $X \in C^2([-1; -1])$  solution du problème fort (13). Alors  $X$  est solution du problème suivant : chercher  $X \in H_0^1([-1; -1])$  tel que*

$$\int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{dV}{dx}(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) V(x) dx, \quad \forall V \in H_0^1([-1; -1]). \quad (14)$$

*Preuve de (13)  $\Rightarrow$  (14).* Soit  $X$  solution de (13). En multipliant l'équation sur  $] - 1; 1[$  par  $V \in H_0^1([-1; -1])$ , et en intégrant sur l'intervalle, on a :

$$-\int_{-1}^1 \frac{d^2 X}{dx^2}(x) V(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) V(x) dx$$

Comme  $X$  est  $C^2$ , on peut effectuer une intégration par parties à gauche, ce qui donne :

$$-\left[ \frac{dX}{dx}(x) V(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{dV}{dx}(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) V(x) dx$$

Enfin, comme  $V \in H_0^1([-1; -1])$ , le terme de bord disparaît, et on obtient donc :

$$\forall V \in H_0^1([-1; -1]), \int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{dV}{dx}(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) V(x) dx$$

On montre donc que (13)  $\Rightarrow$  (14). □

**Proposition 1.10.** Soit  $X \in H_0^1([-1; -1])$  solution du problème faible (14). Alors  $X$  est solution du problème suivant : il existe  $X \in \mathcal{D}'([-1; -1])$  qui vérifie :

$$-\frac{d^2 X}{dx^2} = f \text{ sur } ]-1; 1[ \quad (15)$$

Preuve de (14)  $\Rightarrow$  (15). Soit  $X \in H_0^1([-1; -1])$  solution de (14). On a donc :

$$\forall V \in H_0^1([-1; 1]), \int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{dV}{dx}(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) V(x) dx$$

On sait que  $\mathcal{D}([-1; 1]) \subset H_0^1([-1; -1])$ . Prenons, en particulier  $V = \varphi \in \mathcal{D}([-1; 1])$ . On a alors :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}([-1; 1]), \int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx$$

On introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}([-1; 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx \\ R : \mathcal{D}([-1; 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

On a aussi, par inégalité triangulaire puis par inégalité de Cauchy-Schwartz, que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx \right| &\leq \int_{-1}^1 \left| \frac{dX}{dx}(x) \right| \left| \frac{d\varphi}{dx}(x) \right| dx \\ &\leq \left\| \frac{dX}{dx} \right\|_{L^2([-1; 1])} \left\| \frac{d\varphi}{dx} \right\|_{L^2([-1; 1])} \end{aligned}$$

Et comme  $X$  est dans  $H_0^1([-1; 1])$ ,  $\frac{dX}{dx}$  est bien de carré intégrable. On démontre ainsi que  $T$  est une distribution. De plus,  $R$  est naturellement une distribution. Donc finalement, on a l'égalité suivante au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}([-1; 1]), \langle T, \partial_x \varphi \rangle &= \langle R, \varphi \rangle \\ \text{donc } \forall \varphi \in \mathcal{D}([-1; 1]), -\langle \partial_x T, \varphi \rangle &= \langle R, \varphi \rangle \\ \text{et finalement } \forall \varphi \in \mathcal{D}([-1; 1]), \langle -\partial_x T - R, \varphi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Donc nécessairement,  $-\partial_x T = R$ , au sens des distributions, et on montre ainsi que  $X \in \mathcal{D}'([-1; 1])$  et vérifie (15).  $\square$

**Proposition 1.11.** Soit  $X \in \mathcal{D}'([-1; -1])$  solution du problème (15). Alors  $X$  est solution du problème suivant : il existe  $X \in \mathcal{C}^2([-1; -1])$  qui vérifie le problème (13).

Preuve de (15)  $\Rightarrow$  (13). Soit  $X \in \mathcal{D}'([-1; -1])$  solution de (15). Donc, on a :

$$-\frac{d^2 X}{dx^2} = D\Sigma_a \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2$$

On remarque que  $k(x) = \int_{-1}^x (D\Sigma_a)(s)(x-s) ds$  est une fonction  $\mathcal{C}^2$  solution de :

$$\frac{d^2}{dx^2}(k(x)) = (D\Sigma_a)(x) \quad \text{donc} \quad -\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^2 k}{dx^2} \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2$$

Donc finalement, on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ X + k \left( \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2} \right)^2 \right] = 0$$

Mais toutes les distributions dont la dérivée est nulle sont les distributions constantes (voir [8]). Donc on en déduit qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$X + k\left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2 = Ax + B$$

On montre ainsi que  $X \in \mathcal{C}^2([-1; 1])$  vérifiant le problème (13). De plus, on détermine  $A$  et  $B$  grâce aux relations  $X(-1) = 0$  et  $X(1) = 0$ . □

*Preuve du Lemme 1.8 :*

*Démonstration.* Comme le problème fort (13) est équivalent au problème faible (14), d'après les propositions 1.9, 1.10 et 1.11, en montrant l'existence et l'unicité de  $X$  pour le problème faible, on montre l'existence et l'unicité d'une telle fonction  $X$  pour le problème fort. On cherche à appliquer le théorème de Lax-Milgram. On sait d'après [7], que  $H_0^1([-1; 1])$  est un Hilbert. Posons les notations suivantes :

$$a(Y, V) := \int_{-1}^1 \frac{dX}{dx}(x) \frac{dV}{dx}(x) dx,$$

$$l(V) := \int_{-1}^1 f(x) V(x) dx.$$

$a(., .)$  est bilinéaire continue sur  $H_0^1([-1; 1]) \times H_0^1([-1; 1])$  : La bilinéarité de  $a$  découle directement de la linéarité de l'intégrale. De plus,  $a$  est continue. En effet, soient  $X, V \in H_0^1([-1; 1])$ , on a par inégalité triangulaire puis par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|a(X, V)| \leq \left\| \frac{dX}{dx} \right\|_{L^2([-1; 1])} \left\| \frac{dV}{dx} \right\|_{L^2([-1; 1])}$$

Et comme la norme définie comme  $u \mapsto \|u'\|_{L^2([-1; 1])}$  est une norme sur  $H_0^1([-1; 1])$  qui est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  (inégalité de Poincaré, voir [7]), on peut conclure que  $a$  est continue.

$a(., .)$  est coercive : En effet, soit  $V \in H_0^1([-1; 1])$ , on a :

$$a(V, V) = \int_{-1}^1 \left(\frac{dV}{dx}(x)\right)^2 dx := \left\| \frac{dV}{dx} \right\|_{L^2([-1; 1])}^2$$

De la même façon que ci-dessus, comme la norme  $u \mapsto \|u'\|_{L^2([-1; 1])}$  est une norme sur  $H_0^1([-1; 1])$ , on peut conclure que  $a$  est coercive.

$l(\cdot)$  est linéaire continue sur  $H_0^1([-1; 1])$  : La linéarité de  $l$  découle directement de la linéarité de l'intégrale. De plus,  $l$  est continue. En effet, soit  $V \in H_0^1([-1; 1])$ . On rappelle que  $f$  est continue sur  $[-1; 1]$  par produit de fonctions continues sur ce même intervalle, du fait de l'hypothèse 1.1. Donc nécessairement,  $f$  est bornée sur  $[-1; 1]$  (théorème de Heine), ainsi, par inégalité triangulaire :

$$|l(V)| \leq \|f\|_{\infty} \int_{-1}^1 |V(x)| dx$$

Et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$|l(V)| \leq \|f\|_{\infty} \sqrt{2} \|V\|_{L^2([-1; 1])}$$

Enfin par définition de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$ , on a :

$$|l(V)| \leq \|f\|_{\infty} \sqrt{2} \|V\|_{H^1([-1; 1])}$$

On en déduit bien que  $l$  est continue sur  $H_0^1([-1; 1])$ . Donc les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées et il existe bien une unique fonction  $X$  dans  $H_0^1([-1; 1])$  vérifiant la formulation faible (14), et donc, il existe bien une unique fonction  $X$  dans  $H_0^1([-1; 1])$  vérifiant le problème fort (13). □

**Remarque 1.12.** Le lemme de Lax-Milgram permet de justifier que l'on peut calculer les constantes  $A$  et  $B$  de la page 7 avec les conditions aux limites de Dirichlet. En effet, ce n'est pas un problème de Cauchy.

De la même manière, le lemme 1.3 est équivalent à :



**Lemme 1.13.** *Il existe une unique fonction  $Y \in \mathcal{C}^2([-1; -1])$  qui vérifie :*

$$-\frac{d^2Y}{dx^2}(x) = D(x)\nu_{\Sigma_f}(x)\left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2, \quad (16a)$$

$$Y(-1) = 0, \quad (16b)$$

$$Y(1) = 0. \quad (16c)$$

Posons  $g(x) := D(x)\nu_{\Sigma_f}(x)\left(\frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}\right)^2$ ,  $\forall x \in [-1; 1]$ . Comme on suppose être dans le cadre de l'hypothèse 1.1,  $g$  est continue sur  $[-1; 1]$  donc  $g \in L^2([-1; 1])$ .

Avant de démontrer le lemme, de la même façon que pour  $X$ , on introduit le théorème suivant :

**Théorème 1.14.** *Le problème fort (16) est équivalent au problème variationnel suivant : chercher  $Y \in \mathcal{C}^2([-1; -1])$  tel que*

$$\int_{-1}^1 \frac{dY}{dx}(x) \frac{dV}{dx}(x) dx = \int_{-1}^1 g(x)V(x) dx, \quad \forall V \in H_0^1([-1; -1]). \quad (17)$$

*Preuve du Théorème 1.14 :*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle des propositions 1.9, 1.10 et 1.11 mais adapté à  $Y$ . □

*Preuve du Lemme 1.13 :*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle du lemme 1.8. □

Par ailleurs, (2) nous donne :

$$\frac{dh}{dz} = \nu_{\Sigma_f}(h) \sqrt{2 \left[ \frac{Y(h)}{k_{eff}} - X(h) \right]} \quad (18)$$

Soit, par définition de  $u$  :

$$\frac{dh}{dz} = \frac{1}{D(h) \frac{du}{dh}(h)} \sqrt{2 \left[ \frac{Y(h)}{k_{eff}} - X(h) \right]}$$

Donc d'après nos manipulations, on a encore :

$$\frac{dh}{dz} = \frac{1}{D(h) \frac{dx}{dh}(h) \frac{u(h_s) - u(h_e)}{2}} \sqrt{2 \left[ \frac{Y(h)}{k_{eff}} - X(h) \right]}$$

D'autre part, on a directement que  $\frac{dh}{dz} = \frac{dh}{dx} \frac{dx}{dz}$ , et donc finalement, on obtient :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2}{D(x)(u(h_s) - u(h_e))} \sqrt{2 \left[ \frac{Y(x)}{k_{eff}} - X(x) \right]} \quad (19)$$

**Remarque 1.15.** *On note ici que grâce à (19),  $x$  n'est plus une inconnue, puisque le second membre est connu. Par conséquent  $h$  n'est plus une inconnue, puisque grâce au changement de variable qui relie  $x$  à  $h$ , on peut alors déterminer  $h$ . De la même façon  $\phi$  n'est plus une inconnue, avec la relation (1a), à partir de  $h$  on peut calculer  $\phi$ .*

L'avantage d'une telle forme est que maintenant, on peut caractériser le second membre de (19). En effet,  $Y$  et  $X$  sont nulles aux bords  $-1$  et  $1$  de l'intervalle de définition. On doit encore garantir le caractère bien défini du second membre. On introduit les théorèmes suivants :

**Proposition 1.16.** *(Principe du maximum). On a que  $\min_{x \in [-1; 1]} X(x) = 0$ . En particulier,  $\forall x \in [-1; 1]$ , on a  $X(x) \geq 0$ .*

**Proposition 1.17.** *(Principe du maximum). On a que  $\min_{x \in [-1; 1]} Y(x) = 0$ . En particulier,  $\forall x \in [-1; 1]$ , on a  $Y(x) \geq 0$ .*

*Preuve du Théorème 1.16 :*

*Démonstration.* On commence par constater que  $\forall x \in [-1; 1]$ ,  $D(x)\Sigma_a(x) > 0$ . On note aussi que  $(\frac{u(h_s)-u(h_e)}{2})^2 > 0$ . De plus, on sait qu'il existe une unique fonction  $X \in \mathcal{C}^2([-1; 1])$  telle que :  $-\frac{d^2 X}{dx^2} = D(x)\Sigma_a(x)(\frac{u(h_s)-u(h_e)}{2})^2$  sur  $] - 1; 1[$ , avec  $X(-1) = 0 = X(1)$ .

On sait que  $-X$  est convexe car  $D(x)\Sigma_a(x)(\frac{u(h_s)-u(h_e)}{2})^2 > 0$ ,  $\forall x \in [-1; 1]$ . Donc il existe un unique point de minimum  $x^*$  de  $-X$  qui est strictement négatif car  $-X(-1) = 0$ . Mais sur  $[-1; x^*]$ ,  $-X'' > 0$  donc  $X'' < 0$ , autrement dit  $X'$  est décroissante sur cet intervalle. Cependant  $X'(x^*) = 0$  puisque  $x^*$  est un point de minimum et donc nécessairement  $X' > 0$  et donc  $X$  est croissante positive sur cet intervalle. De la même  $-X(1) = 0$ , donc un raisonnement semblable sur  $[x^*; 1]$  permet de dire que  $X'$  est décroissante sur cette intervalle et  $\forall x \in [x^*; 1]$ ,  $X'(x) < X'(x^*) = 0$  donc  $X$  est décroissante positive sur  $[x^*; 1]$ .

Finalement, on montre que  $\min_{x \in [-1; 1]} X(x) = 0$  et que  $\forall x \in [-1; 1]$ , on a  $X(x) \geq 0$ . □

*Preuve du Théorème 1.17 :*

*Démonstration.* On peut faire le même genre de démonstration que pour la preuve du théorème 1.16 en remarquant que  $\forall x \in [-1; 1]$ ,  $D(x)\nu\Sigma_f(x) > 0$  et en utilisant le problème fort (16). □

Donc  $Y$  et  $X$  sont des fonctions positives sur  $[-1; 1]$ , mais que peut-on dire de  $\sqrt{\frac{1}{k_{eff}}Y(x) - X(x)}$ ,  $\forall x \in [-1; 1]$ ? Notons  $\lambda := \frac{1}{k_{eff}}$ . On a que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda Y - X \leq 0$ , donc c'est impossible par définition de la fonction racine carrée. Ainsi, on doit chercher  $\lambda \in [\lambda_*; +\infty[$ , avec  $\lambda_* := \min\{\lambda | \forall x \in [-1; 1], \lambda Y(x) - X(x) \geq 0\}$ .

**Proposition 1.18.** Soit  $\lambda_* := \min\{\lambda | \forall x \in [-1; 1], \lambda Y(x) - X(x) \geq 0\}$ , alors

$$\lambda_* := \max_{x \in [-1; 1]} \frac{X(x)}{Y(x)}$$

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde, supposons que  $\lambda_* < \max_{x \in [-1; 1]} \frac{X(x)}{Y(x)}$ . Donc, il existe  $x_0 \in [-1; 1]$  tel que  $\lambda_* < \frac{X(x_0)}{Y(x_0)}$ . Et donc  $\lambda_* Y(x_0) - X(x_0) < 0$ , ce qui est impossible par définition de  $\lambda_*$ . □

## 2 Présentation de deux méthodes de résolution numériques

Maintenant que l'on a (19), on peut utiliser des méthodes que l'on connaît pour résoudre cette équation. On rappelle ici, que l'on cherche  $\lambda$ . En effet, la variable  $x$  est connue puisque donnée dans les relations pour effectuer les calculs, les fonctions  $X$  et  $Y$  sont déterminées et enfin le terme  $\frac{2}{D(x)(u(h_s)-u(h_e))}$  est connu puisqu'on peut réaliser une approximation grâce, notamment, à la table de données 1 et à la définition de  $u$ .

### 2.1 Première méthode : une méthode usuelle

La première méthode que l'on souhaite mettre en place, consiste à intégrer de part et d'autre la relation suivante découlant directement de (19) :

$$\frac{dx}{\frac{2}{D(x)(u(h_s)-u(h_e))} \sqrt{2[\frac{Y(x)}{k_{eff}} - X(x)]}} = dz$$

En intégrant entre 0 et  $L$  à droite et entre  $-1$  et  $1$  à gauche, on obtient :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{2}{D(x)(u(h_s)-u(h_e))} \sqrt{2[\frac{Y(x)}{k_{eff}} - X(x)]}} = \int_0^L dz \quad (20)$$

Comme  $X$  et  $Y$  sont nulles en  $-1$  et  $1$ , il y a un problème de définition de l'intégrale au sens des fonctions bornées. Donc pour implémenter une méthode numérique d'intégration afin de calculer cette intégrale, on choisit d'adapter le terme de gauche.

Notons  $\gamma := -(\frac{u(h_s)-u(h_e)}{2})^2$ . On sait, d'après les interpolations que l'on a réalisé et d'après les propriétés des fonctions  $X$  et  $Y$ , que l'on a :

$$Y(x) = (1 - x^2)Y_{bis}(x), \quad (21a)$$

$$X(x) = (1 - x^2)X_{bis}(x), \quad (21b)$$

**Remarque 2.1.** Les définitions exactes des fonctions  $Y_{bis}$  et  $X_{bis}$  dépendent de l'approximation qui a été faite sur les seconds membres des problèmes forts (13) et (16). Dans le cas d'une interpolation de Lagrange, on aurait alors  $Y_{bis}(x) := (px^2 + kx + u)$ ,  $X_{bis}(x) := (ax^2 + bx + c)$ . En reprenant les notations de la partie 1.2, on obtient :

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\gamma}{12}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \\ k &= \frac{\gamma}{6}((x_2 + x_3)\beta_1 + (x_1 + x_3)\beta_2 + (x_1 + x_2)\beta_3), \\ u &= -\frac{\gamma}{12}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - \frac{\gamma}{2}(x_2x_3\beta_1 + x_1x_3\beta_2 + x_1x_2\beta_3), \\ a &= -\frac{\gamma}{12}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ b &= \frac{\gamma}{6}((x_2 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_2)\alpha_3), \\ c &= -\frac{\gamma}{12}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\gamma}{2}(x_2x_3\alpha_1 + x_1x_3\alpha_2 + x_1x_2\alpha_3). \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'autres études ont été faites en utilisant une approximation linéaire des termes sources des problèmes forts (13) et (16), c'est le cas dans le papier [1]. En fait, pour déterminer les expressions littérales de  $X$  et  $Y$ , on choisi d'intégrer successivement les équations (13) et (16) puisque leur expression nous le permet. Mais il est tout à fait possible, si on utilise un autre changement de variable de se ramener à d'autres problèmes fort sur  $[-1; 1]$  et auquel cas il est préférable, comme c'est fait dans [1], de passer par la formulation variationnelle projetée sur l'espace  $V := \{v|v(x) = (1 - x^2)(ax + b), (a, b) \in \mathbb{R}\} \subset H_0^1([-1; 1])$  et de retrouver des expressions littérales pour  $X$  et  $Y$ .

On rappelle que  $x(z) := -1 + 2 \sin^2(\theta(z))$ , on a alors :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2}{D(x)(u(h_s) - u(h_e))} \sqrt{2(1 - x^2)[\lambda Y_{bis}(x) - X_{bis}(x)]}$$

Mais  $\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dz}$ , avec  $x = -1 + 2 \sin^2(\theta)$ . Donc  $\frac{dx}{d\theta} = 4 \sin(\theta) \cos(\theta) = 2\sqrt{4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}$ . Mais  $x = -1 + 2 \sin^2(\theta)$ , donc  $x + 1 = 2 \sin^2(\theta)$  et  $1 - x = 2 - 2 \sin^2(\theta) = 2(1 - \sin^2(\theta)) = 2 \cos^2(\theta)$ . On remarque alors que  $4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) = (1 - x)(x + 1) = 1 - x^2$ .

Donc  $\frac{dx}{dz} = 2\sqrt{1 - x^2} \frac{d\theta}{dz}$  et finalement, comme  $x = -1 + 2 \sin^2(\theta)$  et en reprenant (19), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} &= \frac{2}{D(\theta)(u(h_s) - u(h_e))} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\lambda Y_{bis}(\theta) - X_{bis}(\theta)}, \\ \text{soit encore, } \frac{d\theta}{dz} &= \frac{2}{D(\theta)(u(h_s) - u(h_e))} \sqrt{\frac{1}{2} \lambda Y_{bis}(\theta) - X_{bis}(\theta)}. \end{aligned}$$

Avec cette formulation, on peut réécrire la relation (20) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\frac{2}{D(\theta)(u(h_s) - u(h_e))} \sqrt{\frac{1}{2} (\lambda Y_{bis}(\theta) - X_{bis}(\theta))}} = L \quad (22)$$

De cette façon, on peut implémenter une méthode d'intégration numérique sur le membre de gauche sans avoir de problème de définition. Soit  $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N = \frac{\pi}{2}$  une discrétisation de l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$ . En utilisant la méthode des trapèzes, (22) devient :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{2} (g_{j+1}(\lambda) + g_j(\lambda)) = L \quad \text{avec } \forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket, g_j(\lambda) := \frac{1}{\frac{2}{D(\theta_j)(u(h_s) - u(h_e))} \sqrt{\frac{1}{2} (\lambda Y_{bis}(\theta_j) - X_{bis}(\theta_j))}} \quad (23)$$

Une fois cette écriture obtenue, on peut mettre en place une méthode de Newton pour trouver le  $\lambda$  associé à un  $L$  donné.

## Méthode de Newton

Pour définir notre méthode de Newton, on a besoin de définir la fonction sur laquelle on va effectuer la recherche de zéro. On introduit alors la fonction  $K$  suivante :

$$\begin{aligned} K &: [\lambda_*; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto K(\lambda) := \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{2} (g_{j+1}(\lambda) + g_j(\lambda)) - L \end{aligned}$$

La fonction  $K$  est bien dérivable de dérivée :

$$\frac{dK}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{2} \left( \frac{d}{d\lambda}(g_{j+1}(\lambda)) + \frac{d}{d\lambda}(g_j(\lambda)) \right),$$

avec  $\frac{d}{d\lambda}(g_j(\lambda)) = -\frac{Y_{bis}(\theta_j)}{\frac{8}{D(\theta_j)(u(h_s)-u(h_e))} \left( \frac{1}{2}(\lambda Y_{bis}(\theta_j) - X_{bis}(\theta_j)) \right)^{\frac{3}{2}}}, \forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

Ainsi on peut construire notre suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{K(\lambda_k)}{\frac{dK}{d\lambda}(\lambda_k)}, \forall k \in \mathbb{N}$$

convergeant vers  $\lambda_z$  qui est tel que  $K(\lambda_z) = 0$  et en fixant une tolérance pour  $|\lambda_{k+1} - \lambda_k|$  et un nombre d'itérations maximal.

## 2.2 Deuxième méthode : une utilisation du schéma de Crank-Nicolson

On repart de l'équation (19) sur  $[0; L]$ , avec  $x$  fonction de  $[0; L]$  dans  $[-1; 1]$  définie comme dans la partie 2.1. Soit  $z_0 = 0 < z_1 < \dots < z_N = L$  une discrétisation non-régulière de  $[0; L]$ . On pose  $\forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $\Delta_{z_j} = z_{j+1} - z_j$ , donc  $\Delta_{z_j}$  dépend de  $\lambda$ , et est donné par la relation suivante d'après (19) :

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta_{z_j}} = \frac{1}{2}(F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)), \forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad (\text{schéma de Crank-Nicolson}),$$

avec  $F_j(\lambda) := \frac{1}{D(x_j)} \sqrt{2(\lambda Y(x_j) - X(x_j))} \frac{2}{u(h_s) - u(h_e)}, \forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,

et  $x_j = -1 + 2 \sin^2\left(\frac{\pi j}{2N}\right), \forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

Mais par ailleurs, on sait que  $\sum_{j=0}^{N-1} \Delta_{z_j}(\lambda) = L$ , par définition de l'intervalle, donc on a :

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\frac{1}{2}[F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)]} = L. \quad (24)$$

Comme dans la partie 2.1, on peut désormais mettre en place une méthode de Newton qui trouve le  $\lambda$  associé à  $L$ .

### Méthode de Newton

Pour définir notre méthode de Newton, on a encore besoin de définir la fonction sur laquelle on va effectuer la recherche de zéro. On introduit alors la fonction  $P$  suivante :

$$P : [\lambda_*; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \mapsto P(\lambda) := \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\frac{1}{2}[F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)]} - L$$

On cherche à montrer que  $P$  est dérivable, calculons sa dérivée. Pour ce faire, on réutilise la relation suivante :

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta_{z_j}} = \frac{1}{2}(F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)), \forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad (25)$$

En dérivant de part et d'autre par  $\lambda$ , et du fait que  $\Delta_{z_j}$  dépend de  $\lambda$ , on a,  $\forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  :

$$-(x_{j+1} - x_j) \frac{1}{(\Delta_{z_j})^2} \frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j}) = \frac{1}{u(h_s) - u(h_e)} \left( \frac{Y(x_j)}{D(x_j) \sqrt{2(\lambda Y(x_j) - X(x_j))}} + \frac{Y(x_{j+1})}{D(x_{j+1}) \sqrt{2(\lambda Y(x_{j+1}) - X(x_{j+1}))}} \right).$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j}) = -\frac{(\Delta_{z_j})^2}{(x_{j+1} - x_j) u(h_s) - u(h_e)} \left( \frac{Y(x_j)}{D(x_j) \sqrt{2(\lambda Y(x_j) - X(x_j))}} + \frac{Y(x_{j+1})}{D(x_{j+1}) \sqrt{2(\lambda Y(x_{j+1}) - X(x_{j+1}))}} \right).$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j}) = -(\Delta_{z_j}) \frac{2}{(F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)) u(h_s) - u(h_e)} \left( \frac{Y(x_j)}{D(x_j) \sqrt{2(\lambda Y(x_j) - X(x_j))}} \right.$$

$$\left. + \frac{Y(x_{j+1})}{D(x_{j+1}) \sqrt{2(\lambda Y(x_{j+1}) - X(x_{j+1}))}} \right).$$

Enfin, en utilisant la relation (25), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j}) &= -\Delta_{z_j} \left( \frac{Y(x_j)}{2((\lambda Y(x_j) - X(x_j)) + \frac{D(x_j)}{D(x_{j+1})} \sqrt{\lambda Y(x_j) - X(x_j)} \sqrt{\lambda Y(x_{j+1}) - X(x_{j+1})})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y(x_{j+1})}{2((\lambda Y(x_{j+1}) - X(x_{j+1})) + \frac{D(x_{j+1})}{D(x_j)} \sqrt{\lambda Y(x_j) - X(x_j)} \sqrt{\lambda Y(x_{j+1}) - X(x_{j+1})})} \right) \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que, de part ce qui a été fait, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\lambda}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\frac{1}{2}[F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)]} - L \right) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left( \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{\frac{1}{2}[F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)]} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\frac{1}{2}[F_{j+1}(\lambda) + F_j(\lambda)]} \right) \end{aligned}$$

Par la relation (25) et par sommation de 0 à  $N - 1$ , on a :

$$\frac{dP}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j}).$$

Cependant dans notre expression de  $\frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j})$ , on a un problème de définition. On rappelle que les fonctions  $X$  et  $Y$  sont nulles en  $-1$  et  $1$  donc elles sont nulles aux extrémités de la discrétisation. On choisit alors de factoriser par  $(1 - x^2)$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j}) &= -\Delta_{z_j} \left( \frac{(1 - x_j^2)Y_{bis}(x_j)}{2((1 - x_j^2)(\lambda Y_{bis}(x_j) - X_{bis}(x_j)) + \frac{D(x_j)}{D(x_{j+1})} (1 - x_j^2) \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_j) - X_{bis}(x_j)} \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_{j+1}) - X_{bis}(x_{j+1})})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - x_j^2)Y_{bis}(x_{j+1})}{2((1 - x_j^2)(\lambda Y_{bis}(x_{j+1}) - X_{bis}(x_{j+1})) + \frac{D(x_{j+1})}{D(x_j)} (1 - x_j^2) \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_j) - X_{bis}(x_j)} \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_{j+1}) - X_{bis}(x_{j+1})})} \right) \end{aligned}$$

soit encore,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(\Delta_{z_j}) &= -\Delta_{z_j} \left( \frac{Y_{bis}(x_j)}{2((\lambda Y_{bis}(x_j) - X_{bis}(x_j)) + \frac{D(x_j)}{D(x_{j+1})} \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_j) - X_{bis}(x_j)} \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_{j+1}) - X_{bis}(x_{j+1})})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_{bis}(x_{j+1})}{2((\lambda Y_{bis}(x_{j+1}) - X_{bis}(x_{j+1})) + \frac{D(x_{j+1})}{D(x_j)} \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_j) - X_{bis}(x_j)} \sqrt{\lambda Y_{bis}(x_{j+1}) - X_{bis}(x_{j+1})})} \right) \end{aligned}$$

Et dans ce cas, pas de problème de division par 0. Ainsi on justifie que  $P$  est dérivable. On raisonne de la même façon que la première méthode 2.1, on peut construire notre suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{P(\lambda_k)}{\frac{dP}{d\lambda}(\lambda_k)}, \forall k \in \mathbb{N}$$

convergeant vers  $\lambda_z$  qui est tel que  $P(\lambda_z) = 0$  et en fixant une tolérance pour  $|\lambda_{k+1} - \lambda_k|$  et un nombre d'itérations maximal.

**Remarque 2.2.** Dans la pratique, lorsque l'on implémente la dérivée de  $P$  en Python, on substitue encore le coefficient  $\Delta_{z_j}$  par son expression faisant intervenir  $(x_{j+1} - x_j)$  et  $F_j(\lambda)$  grâce à la relation (25).

### 3 Résultats et Analyse

Maintenant que le problème théorique est posé et que l'on a détaillé la manière dont on va résoudre cette équation, on va pouvoir étudier les résultats obtenus. L'idée est dans un premier temps de valider l'implémentation qui a été faite des fonctions nécessaires à la résolution du problème de recherche de  $\lambda$ . Ensuite nous verrons les résultats obtenus avec la méthode de Newton, pour chacune des deux approches présentées dans la partie 2. Enfin dans une dernière partie, on essaiera de comparer nos résultats avec les ressources bibliographiques dont on dispose.

**Remarque 3.1.** Tous les résultats qui sont dans cette partie ont été obtenus en faisant une interpolation de Lagrange sur les seconds membres des problèmes forts que l'on retrouve dans les lemmes 1.2 et 1.3.

### 3.1 Vérification de l'implémentation

Vérifions d'abord l'implémentation du second membre de (2).

#### 3.1.1 Validation des allures des courbes de $X$ et $Y$

La première étape pour s'assurer de l'implémentation de  $X$  et  $Y$  est de tracer l'allure des courbes sur l'intervalle  $[-1; 1]$ .

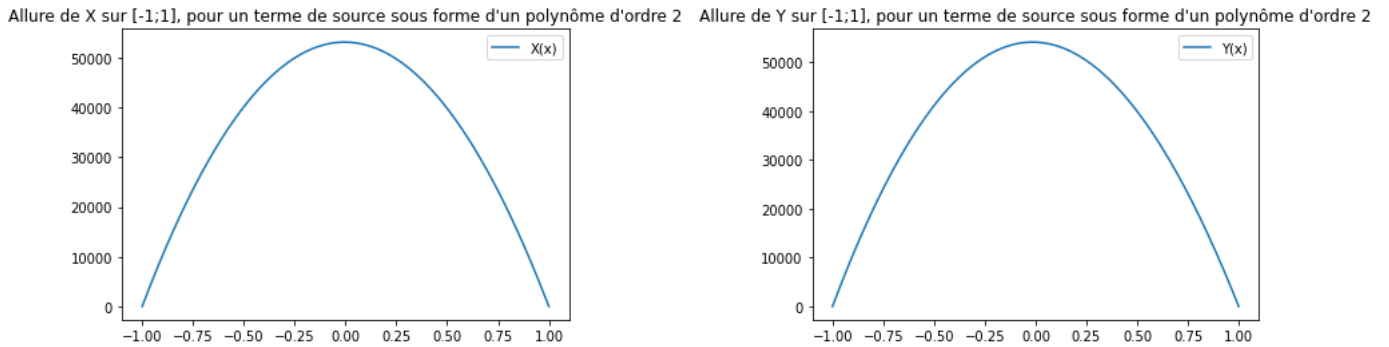


FIGURE 2 – Allure de  $X$  et  $Y$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$

Comme on l'a démontré dans la partie 1.3, on remarque que, sur la figure 2, les fonctions  $X$  et  $Y$  sont positives sur  $[-1; 1]$  et s'annule bien aux bords. Donc l'allure générale semble bonne et les contraintes aux bords sont respectées pour chaque fonction. Que peut-on dire de l'amplitude? On sait que l'on calcule  $X$  et  $Y$  d'après les problèmes (13) et (16), et que les seconds membres de ces problèmes sont, dans notre cas, approchés par un polynôme d'ordre deux. Mais on peut vérifier l'échelle des valeurs prises par  $X$  et  $Y$  en choisissant cette fois, de voir le second membre de chaque problème comme une constante, dont la valeur doit être plus ou moins proche de celles qu'on connaît en 3 points d'après le tableau 1. En effet, lorsque le second membre de chaque équation est approché par une constante, respectivement  $K1$  et  $K2$ , les valeurs aux bords de  $X$  et  $Y$  imposent que  $X(x) = \frac{K1}{2}(1-x^2)$  et  $Y(x) = \frac{K2}{2}(1-x^2)$ . On a alors deux versions pour chaque fonction,  $X$  et  $Y$ , que l'on décide de comparer.

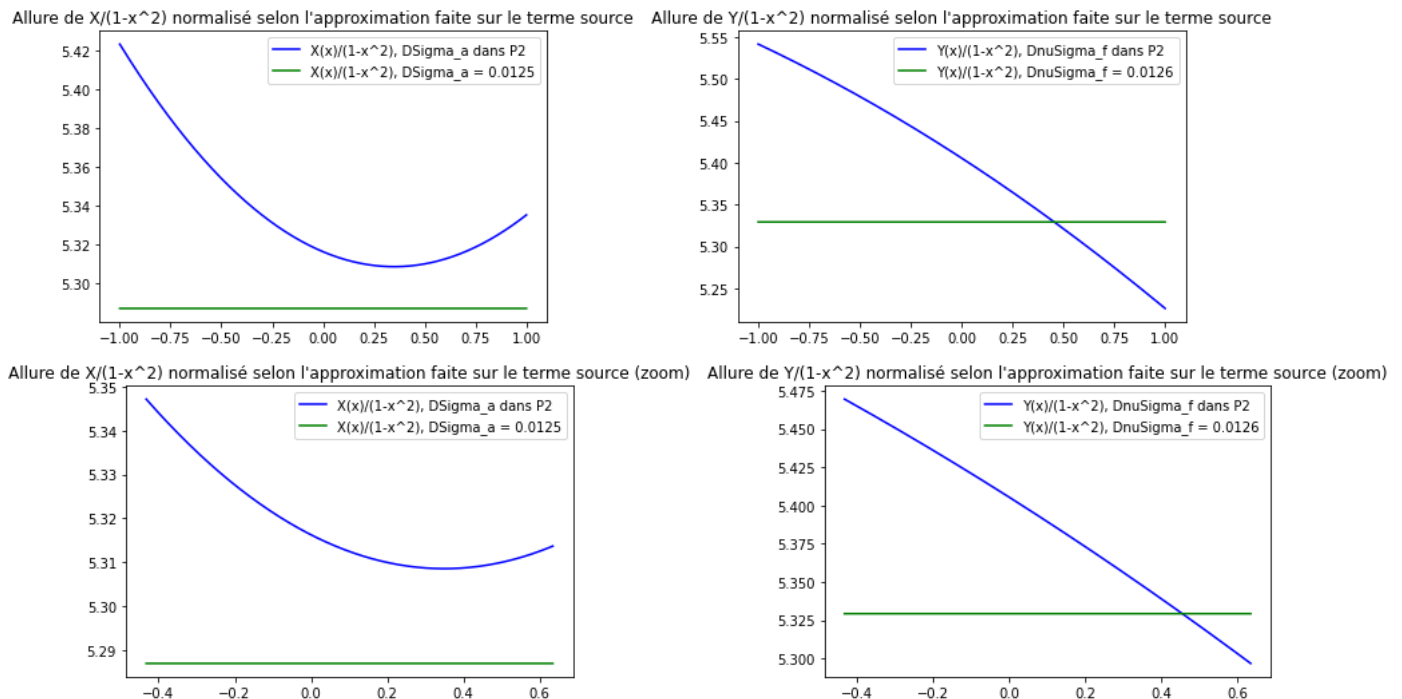


FIGURE 3 – Allure de  $X$  et  $Y$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$  en fonction du second membre

Sur les courbes de la figure 3, on a volontairement changé l'échelle des valeurs en ordonnée pour que l'on constate bien, que ce soit pour la fonction  $X$  ou  $Y$ , que les valeurs obtenues pour nos fonctions avec un second membre approché par interpolation de Lagrange sont cohérentes avec ce à quoi on pouvait s'attendre.

De la même façon, comme on compare pour une valeur constante du terme source, on peut, sur les courbes précédentes, ajouter les valeurs du termes sources connus aux trois points d'après 1.

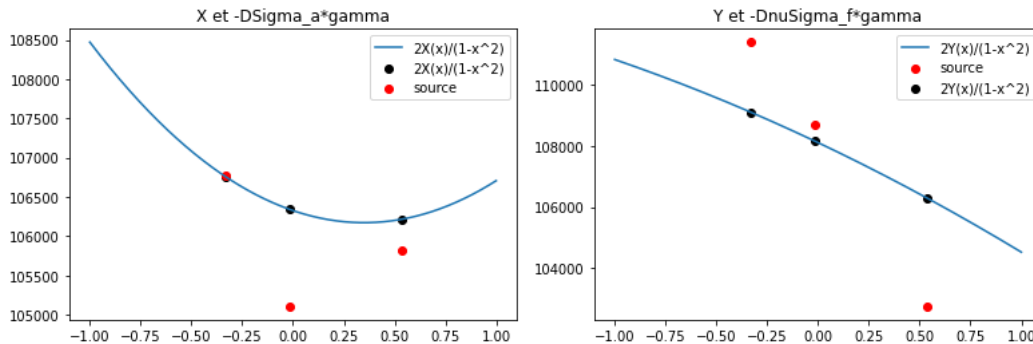


FIGURE 4 – Allure de X et Y sur l'intervalle  $[-1; 1]$  et comparaison avec les valeurs connues du second membre

Là encore, sur la figure 4, les différents points du terme source, pour chaque fonction, valident les courbes des fonctions X et Y.

### 3.1.2 Validation des fonctions K et P

Les fonctions K et P sont définies dans la partie 2. On cherche ici à savoir si on a bien implémenté notre somme pour chaque fonction. On trace donc chaque somme en fonction de  $\lambda$ .

La première chose que l'on constate, sur les figures 5 et 6, est que les sommes, bien que distinctes, ont une allure semblable. De plus, comme attendu, plus  $\lambda$  tend vers des grandes valeurs plus la somme tend vers 0. Aussi, plus  $\lambda$  s'approche de  $\lambda_*$  plus la somme tend vers des valeurs infinies, tout en respectant l'asymptote verticale en  $\lambda = \lambda_*$ .

## 3.2 Résultats obtenus avec la méthode de Newton pour le problème de recherche de $\lambda$

**Remarque 3.2.** Dans la suite, tous les résultats ont été obtenus en fixant un nombre maximal de 30 itérations à l'algorithme de Newton.

### 3.2.1 Premier cas : vérification de la convergence de l'algorithme

Dans un premier temps, on s'est intéressé au fonctionnement de notre algorithme. Le but est ici de se rendre compte du bon fonctionnement de ce dernier, en particulier de mettre en évidence les propriétés connues de la méthode de Newton : la convergence quadratique lorsqu'il y a convergence et le rôle primordial du premier itéré, c'est-à-dire que s'il n'est pas dans le bon intervalle l'algorithme ne peut converger.

#### Pour un L fixé à 30 cm

Dans cette partie les résultats sont obtenus avec une discrétisation à  $N = 10000$  points de l'intervalle  $[-1; 1]$ . On fixe  $L = 30$  cm, la tolérance de l'algorithme est fixée à  $1.e^{-8}$ . Voici les erreurs que l'on obtient, pour un premier itéré qui vaut respectivement  $\lambda_0 = 1.05$  et  $\lambda_0$  vaut 1.09.

| Itérations | Erreurs successives pour la méthode Classique | Erreurs successives pour la méthode Crank-Nicolson |
|------------|---|--|
| 1          | 8.694184444379971e-06                         | 8.69414841320193e-06                               |
| 2          | 1.2971403950956528e-09                        | 1.2972987128989644e-09                             |

TABLE 2 – Erreurs absolues obtenues à chaque itération pour un L donné de 30 cm et  $\lambda_0 = 1.05$

À titre comparatif, lorsque le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.10 l'algorithme ne fournit aucun résultat.

#### Pour un L fixé à 60 cm

Dans cette partie les résultats sont obtenus avec une discrétisation à  $N = 10000$  points de l'intervalle  $[-1; 1]$ . On fixe  $L = 60$  cm, la tolérance de l'algorithme est fixée à  $1.e^{-8}$  et le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.021.

À titre comparatif, lorsque le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.03 l'algorithme ne fournit aucun résultat.

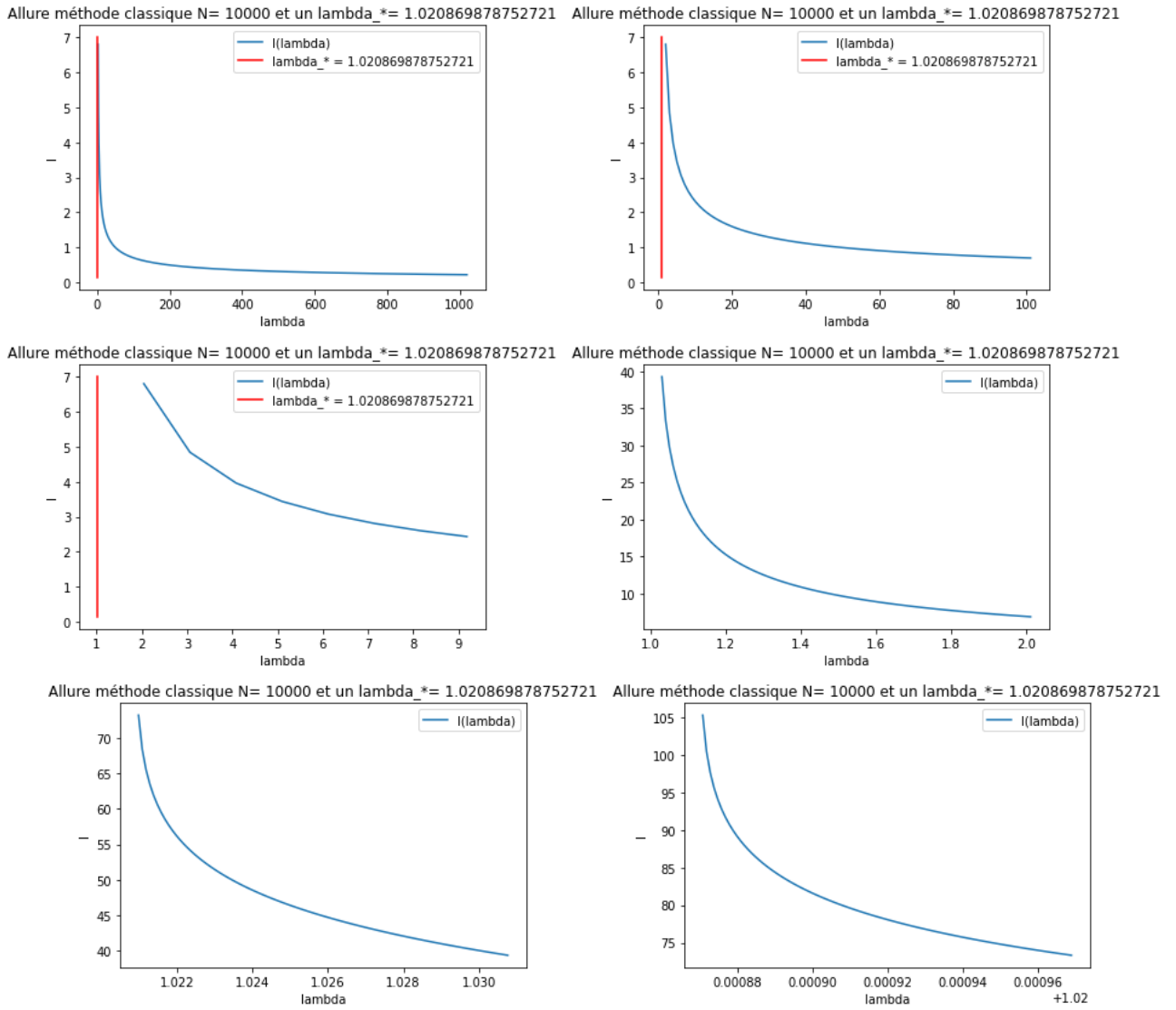


FIGURE 5 – Allure de la somme  $I$  associée à  $K$  pour la méthode usuelle

| Itérations | Erreurs successives pour la méthode Classique | Erreurs successives pour la méthode Crank-Nicolson |
|------------|---|--|
| 1          | 0.062249988699319525                          | 0.06224998772520407                                |
| 2          | 0.010482027902517732                          | 0.010482028325231818                               |
| 3          | 0.009085118165358619                          | 0.009085117273684773                               |
| 4          | 0.002564340147554578                          | 0.002564339608285504                               |
| 5          | 0.00012692013127213464                        | 0.0001269201270506226                              |
| 6          | 2.77832877149109e-07                          | 2.7783533385061787e-07                             |
| 7          | 1.3240519791679617e-12                        | 1.3296030942910875e-12                             |

TABLE 3 – Erreurs absolues obtenues à chaque itération pour un  $L$  donné de 30 cm et  $\lambda_0 = 1.09$

### Pour un $L$ fixé à 100 cm

Dans cette partie les résultats sont obtenus avec une discrétisation à  $N = 10000$  points de l'intervalle  $[-1; 1]$ . On fixe  $L = 100$  cm, la tolérance de l'algorithme est fixée à  $1.e^{-8}$  et le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.02087.

À titre comparatif, lorsque le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.0209 l'algorithme ne fournit aucun résultat.



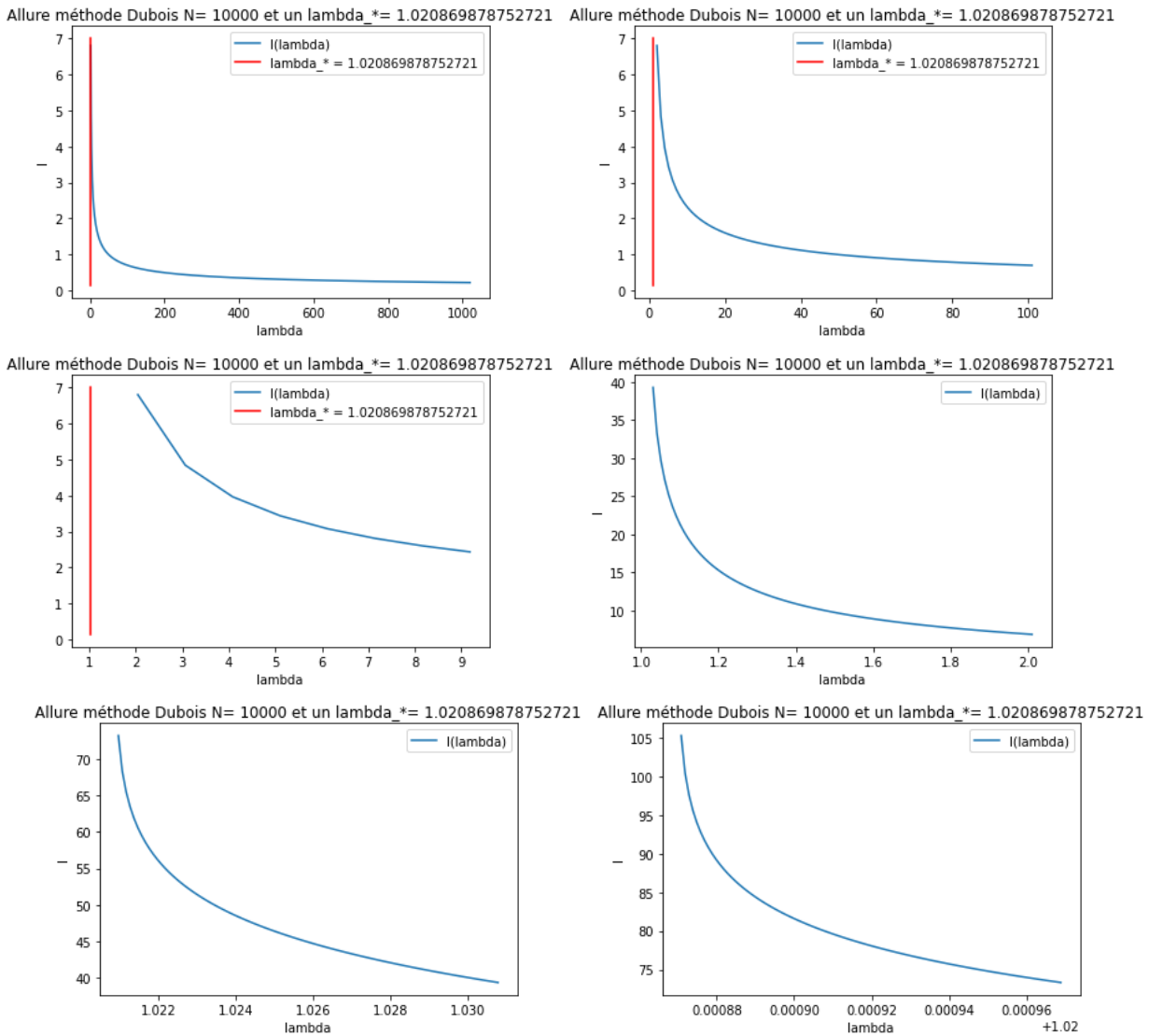


FIGURE 6 – Allure de la somme  $I$  associée à  $P$  pour la méthode avec Crank-Nicolson

| Itérations | Erreurs successives pour la méthode Classique | Erreurs successives pour la méthode Crank-Nicolson |
|------------|---|--|
| 1          | 0.0002123109019136482                         | 0.00021231059428150623                             |
| 2          | 0.0002239605251097565                         | 0.0002239594945427914                              |
| 3          | 8.353207828570852e-05                         | 8.353168150199153e-05                              |
| 4          | 6.289096503797609e-06                         | 6.289169619533297e-06                              |
| 5          | 2.980857316536856e-08                         | 2.9817758706585096e-08                             |
| 6          | 6.610267888618182e-13                         | 7.012168623532489e-13                              |

TABLE 4 – Erreurs absolues obtenues à chaque itération pour un  $L$  donné de 60 cm

### Observations et Interprétations

On note que pour les tableaux 2, 3, 4 et 5, les algorithmes de Newton, quelque soit la méthode, semblent converger à la même vitesse pour un premier itéré fixé et une longueur  $L$  fixée, ce qui est rassurant puisque quelque soit la méthode utilisée, on met en place un algorithme de Newton dont la vitesse de convergence est connue et fixe. On remarque aussi que plus notre  $L$  est grand, plus il faut préciser le premier itéré, sous peine de ne pas voir l'algorithme converger. Ceci s'explique, en regardant la courbe de l'intégrale par rapport à  $\lambda$  (voir figure 5 et 6), par le fait que plus on cherche un  $\lambda$  qui se situe au voisinage de  $\lambda_*$  (c'est le cas pour  $L$  grand), plus la plus grande différence d'intégrale pour deux  $\lambda$  du voisinage est grande.

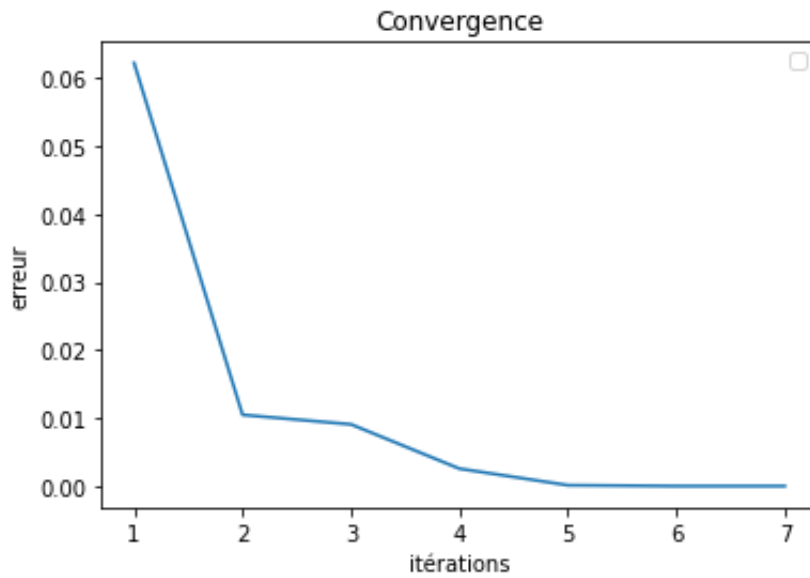


FIGURE 7 – Convergence de l’algorithme de Newton pour  $L = 30$  cm

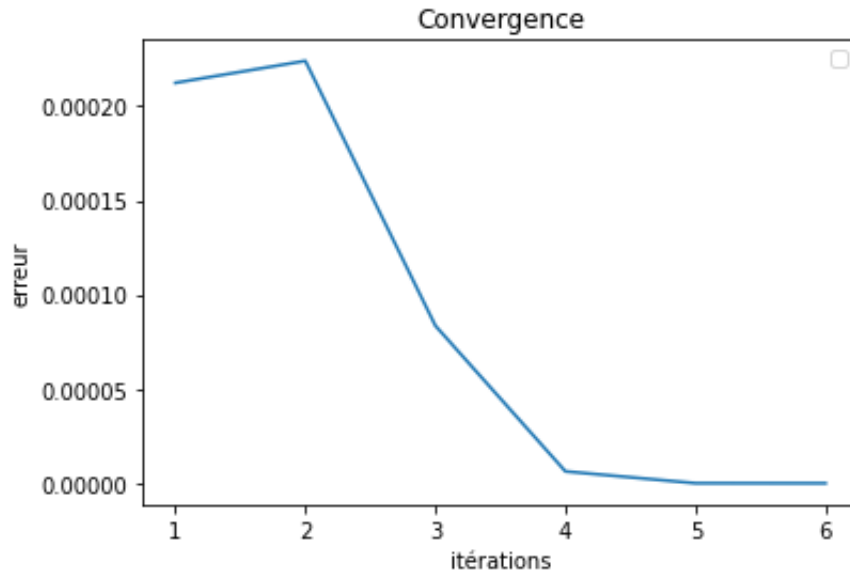


FIGURE 8 – Convergence de l’algorithme de Newton pour  $L = 60$  cm

| Itérations | Erreurs successives pour la méthode Classique | Erreurs successives pour la méthode Crank-Nicolson |
|------------|---|--|
| 1          | 3.268663262279148e-07                         | 3.2772899194455363e-07                             |
| 2          | 6.927407336654312e-07                         | 6.928654505689025e-07                              |
| 3          | 7.172813742961637e-07                         | 7.15685601226923e-07                               |
| 4          | 2.646108478998599e-07                         | 2.634546238944324e-07                              |
| 5          | 1.9793833461179133e-08                        | 1.9743399359839486e-08                             |
| 6          | 9.303269266069947e-11                         | 1.0104739267546847e-10                             |

TABLE 5 – Erreurs absolues obtenues à chaque itération pour un  $L$  donné de 100 cm

Cependant, on remarque, notamment sur les figures 7, 8 et 9, que la convergence n’est pas vraiment quadratique, et ce quelque soit la méthode, puisque la vitesse de convergence est identique.

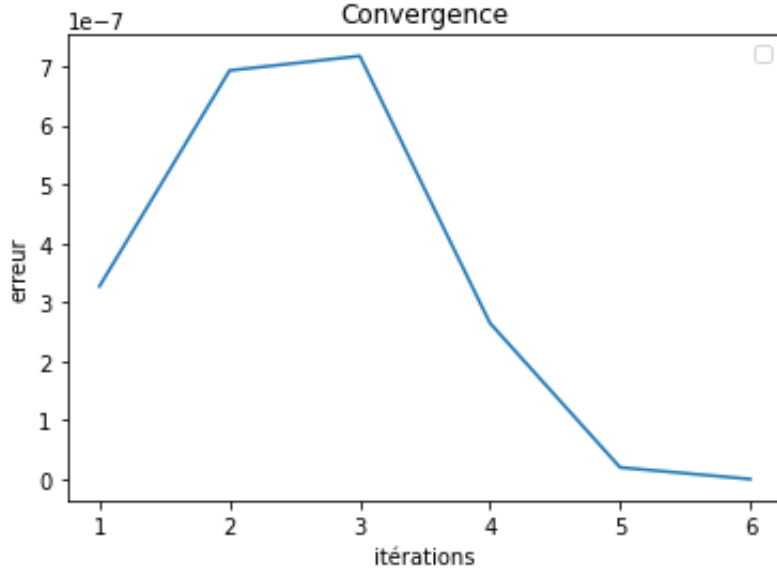


FIGURE 9 – Convergence de l’algorithme de Newton pour  $L = 100$  cm

### 3.2.2 Deuxième étape : vérification des valeurs de $k_{eff}$ obtenues

On cherche ensuite, en se donnant des valeurs de  $L$  (30 cm, 60 cm et 100 cm), à trouver le  $k_{eff}$  associé. Par la suite, on va pouvoir comparer les valeurs de  $k_{eff}$ , obtenues pour un système couplé et donc par les méthodes de Newton décrite dans la partie 2, avec celles obtenues en considérant l’équation (1b) avec des coefficients constants.

**Proposition 3.3.** Soit  $\phi \in H_0^1([-1; 1])$ , et  $D$ ,  $\Sigma_a$  et  $\nu\Sigma_f$  des constantes. On a alors que  $\phi$  est solution de l’équation non-couplée suivante :

$$-\phi''(z) - \frac{\Sigma_a - \frac{\nu\Sigma_f}{k_{eff}}}{D} \phi(z) = 0 \quad \forall z \in [0; L] \quad (26)$$

et on a alors, pour un  $L$  donné :

$$k_{eff} = \frac{\nu\Sigma_f}{D(\frac{\pi}{L})^2 + \Sigma_a} \quad (27)$$

*Démonstration.* On sait que  $\forall z \in [0; L]$ ,  $\phi : z \mapsto \phi(z) = \sin(\frac{\pi}{L}z)$ , est solution de (26). Ainsi, on a :

$$\forall z \in [0; L], -(\frac{\pi}{L})^2 \sin(\frac{\pi}{L}z) - \frac{\Sigma_a - \frac{\nu\Sigma_f}{k_{eff}}}{D} \sin(\frac{\pi}{L}z) = 0$$

Donc  $-(\frac{\pi}{L})^2 = \frac{\Sigma_a - \frac{\nu\Sigma_f}{k_{eff}}}{D}$  et finalement , on a :

$$k_{eff} = \frac{\nu\Sigma_f}{D(\frac{\pi}{L})^2 + \Sigma_a}$$

□

#### Pour un $L$ fixé à 30 cm

Dans cette partie les résultats sont obtenus avec une discrétisation à  $N = 10000$  points de l’intervalle  $[-1; 1]$ . On fixe  $L = 30$  cm, la tolérance de l’algorithme est fixée à  $1.e^{-8}$  et le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.05.

Pour  $L = 30$  cm, la relation (27) donne  $k_{eff} \simeq 0.9738$ .

#### Pour un $L$ fixé à 60 cm

Dans cette partie les résultats sont obtenus avec une discrétisation à  $N = 10000$  points de l’intervalle  $[-1; 1]$ . On fixe  $L = 60$  cm, la tolérance de l’algorithme est fixée à  $1.e^{-8}$  et le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.021.

Pour  $L = 60$  cm, la relation (27) donne  $k_{eff} \simeq 1.0135$ .

| Méthode        | Valeur à l'itération finale de $k_{eff}$ |
|----------------|--|
| Classique      | 0.952373065388141                        |
| Crank-Nicolson | 0.9523730654206782                       |

TABLE 6 – Valeurs de  $k_{eff}$  pour chaque méthode pour un  $L$  donné de 30 cm

| Méthode        | Valeur à l'itération finale de $k_{eff}$ |
|----------------|--|
| Classique      | 0.9789274870815441                       |
| Crank-Nicolson | 0.9789274886652687                       |

TABLE 7 – Valeurs de  $k_{eff}$  pour chaque méthode pour un  $L$  donné de 60 cm

### Pour un $L$ fixé à 100 cm

Dans cette partie les résultats sont obtenus avec une discrétisation à  $N = 10000$  points de l'intervalle  $[-1; 1]$ . On fixe  $L = 100$  cm, la tolérance de l'algorithme est fixée à  $1.e^{-8}$  et le premier itéré  $\lambda_0$  vaut 1.02087.

| Méthode        | Valeur à l'itération finale de $k_{eff}$ |
|----------------|--|
| Classique      | 0.9795547130796983                       |
| Crank-Nicolson | 0.9795547148135969                       |

TABLE 8 – Valeurs de  $k_{eff}$  pour chaque méthode pour un  $L$  donné de 100 cm

Pour  $L = 100$  cm, la relation (27) donne  $k_{eff} \simeq 1.0224$ .

**Remarque 3.4.** On note que l'on fixe le premier itéré, c'est-à-dire le premier  $\lambda$ , mais que nous cherchons  $k_{eff} := \frac{1}{\lambda}$ .

### Observations et Interprétations

D'une manière générale, on remarque que, plus la longueur  $L$  demandée est élevée, plus le coefficient  $k_{eff}$  se rapproche de 1. Et c'est déjà ce que l'on notait en affichant la courbe de l'intégrale par rapport à  $\lambda$  (voir figure 5 et 5. On avait une allure d'exponentielle décroissante avec une asymptote verticale en  $\lambda = \lambda_*$ . Donc plus on était dans des grandes valeurs de  $L$  plus  $\lambda$  était proche de sa valeur minimale et donc  $k_{eff}$  était proche de 1.

Enfin, pour chacune des valeurs de  $L$  donnée, on obtient une valeur de  $k_{eff}$  avec 8 chiffres significatifs minimum pour une tolérance fixée à  $1.e^{-8}$ . C'est à dire que pour chacune des méthodes, les valeurs obtenues correspondent à  $1.e^{-8}$  près.

Parallèlement à ces résultats, la comparaison avec les valeurs de  $k_{eff}$  pour un problème non-couplé permet de valider les résultats obtenus. On va donc dans la suite chercher à comprendre comment cette précision évolue en fonction de la discrétisation de notre maillage sur  $[-1; 1]$ .

### 3.2.3 Troisième étape : précision de l'algorithme par raffinement

Le but de cette section est d'étudier l'influence du nombre de points sur l'intervalle  $[-1; 1]$ , avec les deux méthodes, sur les résultats de  $k_{eff}$  obtenus. Ici, on fixe le premier itéré à  $\lambda_0 = 1.09$ , pour  $L$  fixé à 30 cm. On a donc lancé plusieurs fois le programme pour différentes discrétisations régulières de l'intervalle  $[-1; 1]$ . Les résultats obtenus sont visibles sur dans le tableau 9.

La valeur obtenue par la méthode classique semble, dès  $N = 50$ , avoir atteint une précision maximale. On choisit de réitérer l'expérience avec des valeurs de  $N$  plus petites.

### Observations et Interprétations

Pour la méthode Crank-Nicolson sur le tableau 9, on remarque que l'on a 7 chiffres significatifs qui semblent corrects avec 400 points sur l'intervalle. Cependant, pour la méthode classique, le raffinement du maillage ne semble pas avoir d'influence sur la précision du calcul. Pour comprendre ce qui se passe réellement avec les valeurs de  $k_{eff}$ , on a complété le tableau 10. À partir de  $N = 25$ , on atteint la précision que l'on observait déjà sur le tableau 9. En réalité, déjà à partir de  $N = 18$  on atteint cette valeur.

| N     | Valeur finale de $k_{eff}$ pour la méthode Classique | Valeur finale de $k_{eff}$ pour la méthode Crank-Nicolson |
|-------|--|---|
| 50    | 0.952373065388141                                    | 0.9523743180333272  |
| 100   | 0.952373065388141                                    | 0.9523733877167072  |
| 200   | 0.952373065388141                                    | 0.9523731465432751  |
| 300   | 0.952373065388141                                    | 0.9523731015042504  |
| 400   | 0.952373065388141                                    | 0.9523730857127372  |
| 800   | 0.952373065388141                                    | 0.9523730704715281  |
| 1600  | 0.952373065388141                                    | 0.9523730666591287  |
| 3200  | 0.952373065388141                                    | 0.9523730657058962  |
| 6400  | 0.952373065388141                                    | 0.9523730654675777  |
| 12800 | 0.952373065388141                                    | 0.952373065408003   |
| 25600 | 0.952373065388141                                    | 0.9523730653930893  |

TABLE 9 – Valeurs de  $k_{eff}$ , pour chaque méthode, à l'itération finale pour des raffinements différents

| N  | Valeur finale de $k_{eff}$ pour la méthode Classique | Valeur finale de $k_{eff}$ pour la méthode Crank-Nicolson |
|----|--|---|
| 3  | 0.9522338919640279                                   | 0.949032794347804   |
| 10 | 0.9523730651995927                                   | 0.9523751002787336  |
| 15 | 0.952373065388126                                    | 0.952381495140844   |
| 25 | 0.952373065388141                                    | 0.9523774894223926  |
| 35 | 0.952373065388141                                    | 0.9523755179677956  |
| 50 | 0.952373065388141                                    | 0.9523745977060141  |

TABLE 10 – Valeurs de  $k_{eff}$ , pour chaque méthode, à l'itération finale pour des raffinements différents

### 3.2.4 Quatrième cas : vérification du résultat global de la méthode par le flux

On sait d'après [4], que le couplage dépend d'un coefficient  $m$  propre à la méthode de recherche de  $k_{eff}$  détaillée dans ce papier. En effet, plus  $m$  est proche de 1 plus le couplage est important et inversement. Comme ici, nous n'avons pas utilisée cette méthode pour rechercher  $k_{eff}$  dans un cas où la longueur  $L$  est donnée, nous n'avons à priori aucune information concernant l'importance ou non du couplage. Cependant, les travaux présentés dans [1], rendent compte d'un résultat qui nous intéresse : plus la longueur  $L$  donnée est importante, plus  $m$  est proche de 1, et donc plus le couplage est important. De plus, l'importance du couplage peut être observée en traçant la courbe du flux neutronique  $\phi$ , inconnue de notre système de départ (1) mais qui grâce à notre recherche de  $k_{eff}$  et aux relations (1a) et (2), ne l'est plus. On trace alors l'allure du flux neutronique pour différentes valeurs de  $L$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$ .

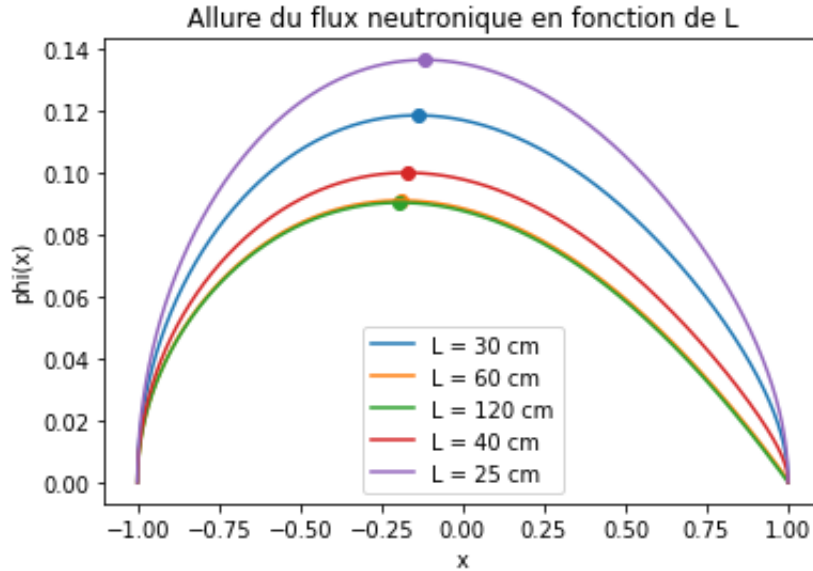


FIGURE 10 – Allure du flux neutronique, pour la méthode utilisant un schéma de Crank-Nicolson, pour différentes valeurs de  $L$  sur l'intervalle  $[-1; 1]$

### Observations et Interprétations

Comme cela est souligné dans le papier [4], plus le couplage est important, plus le flux neutronique a une amplitude réduite et son point de maximum sur l'intervalle  $[-1; 1]$  tend à se rapprocher de  $-1$ , donc le maximum de dépôt d'énergie se produit de plus en plus près du point d'entrée dans la section étudiée du réacteur. Si on met en relation ces informations avec ce que l'on constate sur la figure 10, on vient retrouver un résultat déjà mis en valeur dans le papier [1] qui est que plus la longueur  $L$  augmente, plus le couplage est important.

### Conclusion

Pour conclure, nous sommes partis d'un cas modèle détaillé dans l'article [2], et nous avons adapté les calculs et la démarche dans un cas réel. De plus, après avoir vérifié notre implémentation, les résultats pour notre recherche de  $k_{eff}$  pour  $L$  donné sont satisfaisants. Ils nous permettent, notamment en s'appuyant sur l'étude du flux neutronique, d'aboutir aux mêmes conclusions que le papier [1]. L'avantage de cette méthode réside surtout dans le fait qu'on a maintenant, par interpolation de Lagrange, des formes explicites pour les termes  $D\Sigma_a$  et  $D\nu\Sigma_f$ , et donc des expressions littérales pour les fonctions  $X$  et  $Y$ , lorsque l'on connaît les valeurs de ces termes en 3 points. On peut ainsi mener des études d'incertitudes et d'influence de ces termes sur la valeur de  $k_{eff}$  à  $L$  fixé.

## Remerciements

Je voudrais remercier Bérénice GREC et Olivier LAFITTE de m'avoir permis d'effectuer ce stage. En particulier, j'aimerais remercier Olivier LAFITTE, qui malgré des conditions particulières, a su être disponible pour m'aiguiller et me permettre d'enrichir mes connaissances durant toute la durée du stage.

## Références

- [1] Lafitte O. et Mouhamad R. Dellacherie S., Jamelot E. Numerical result for the coupling of a simple neutronics diffusion model and a simple hydrodynamics low mach number model without coupling codes. 2016.
- [2] Dubois F. et Laffite O. An analytic and symbolic analysis of a coupled thermo-neutronic problem. 2021.
- [3] Dubois F. et Laffite O. Méthode numérique de résolution d'un problème de neutronique. 2021.
- [4] Dellacherie S. et Lafitte O. Une solution explicite monodimensionnelle d'un modèle simplifié de couplage stationnaire thermohydraulique–neutronique. 2016.
- [5] Cuvelier F. Analyse numérique. Notes de Cours, MACS1, 2019.
- [6] Darbas M. Edps : Fondamentaux. Notes de Cours, MACS2, 2020.
- [7] Vauchelet N. Edps avancées 1. Notes de Cours, MACS2, 2021.
- [8] Duyckaerts T. Théorie des distributions. Notes de Cours, MACS2, 2020.